高校数学 Web 問題集

−basic 6−

(利用上の注意点)

この問題集のほとんどはオリジナルに作成されたものです。個人が自らの学習のためにこのファイルを利用することは構いませんが、商用利用および著作権の所在が不明瞭になるような形での二次配布については、固くその行為を禁止致します。特に説明部分の記述についての著作権は当サイト「ky の書架」に帰属しますので御注意下さい。なお高校の授業等での利用を希望される方は問い合わせフォーム(TOP ページにアクセスすると“問い合わせ” のメニューがあります)にて御連絡下さい。

また間違い等(おそらくたくさんあります)を発見された場合にも御連絡いただけると助かります。

最終更新日　2010.12/9

web サイト「ky の書架」にはこれ以外にも「ウィルソンの定理の初等的証明」・「大学入試の整数問題」などのファイルがあります。興味のある方は url(http://kynoshoka.com/)を直接入力するか、サイト名で google または yahoo 検索してアクセスして下さい。

6　数 II の微分・積分

6.1　関数の変化率と微分係数

① 関数の極限

x を a に限りなく近づけたとき $f(x)$ が定数 α に(等しくなる場合も含めて)限りなく近づくことを

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$

で表す。特に整式 $f(x)$ については $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ である。

② 平均変化率と瞬間変化率

関数 $f(x)$ について $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ を $f(x)$ の $a\leqq x\leqq b$ における平均変化率という。また $\lim_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ を $f(x)$ の $x=a$ における瞬間変化率という。ここで、平均変化率は $y=f(x)$ のグラフ上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ をつないだ線分 AB の傾きであり、瞬間変化率は(多くの場合)点 A におけるグラフの接線の傾きである。

③ 微分係数 $f'(a)$

瞬間変化率はまた微分係数とも呼ばれる。$f(x)$ の $x=a$ における微分係数を $f'(a)$ で表すが、②より

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

である。また上式で $x=a+h$ として $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}$ である。

注）このような公式は、どんな意味を持つかを理解した上で使ってゆくことが大切である。単なる丸暗記はあまり良いことではない。

問題 6.1.1 *1

以下の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 2} x^2$　(2) $\lim_{x\to -1}(x^3+2x^2-3x+4)$　(3) $\lim_{h\to 0}(3a^2+2ah+5h^2)$

(4) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$　(5) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}-2}$　(6) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+2x}$

(7) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}$

問題 6.1.2 *2

(1) $f(x)=x^2$ の $1\leqq x\leqq 4$ における平均変化率と $x=1$ における瞬間変化率を求めよ。

(2) $g(x)=x^2-3x$ の $-1\leqq x\leqq 2$ における平均変化率と $x=-1$ における瞬間変化率を求めよ。

(3) $h(x)=-2x^2+4x+1$ とする。定義に従って微分係数 $h'(-2)$, $h'(1)$ をそれぞれ求めよ。

(4) $j(x)=\sqrt{x}$, $k(x)=\dfrac{1}{x}$ とする。定義に従って微分係数 $j'(1)$, $k'(2)$ をそれぞれ求めよ。

*1 (1) 4　(2) 8　(3) $3a^2$　(4) 2　(5) 20　(6) $\dfrac{1}{4}$　(7) $\dfrac{2}{3}$

*2 (1) 順に 5 , 2　(2) 順に -2 , -5　(3) 順に 12 , 0　(4) 順に $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{4}$

問題 6.1.3 [*3]

ある関数 $f(x)$ について $f'(1)=3$, $f'(4)=7$ とする。このとき以下の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$ (2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(4x)-f(4)}{x-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(4x)-f(2x+2)}{x-1}$

6.2 導関数と微分

(導関数)

関数 $f(x)$ において各 x 座標 a に対しての微分係数 $f'(a)$ は(存在すれば)ただ一つに定まるので、この対応は関数である。この関数を $f(x)$ の導関数といい $f'(x)$, $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$ などで表す。

前節で見たとおり関数 $f(x)$ についての微分係数は

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}\ ,\ f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}\ ,\ f'(3)=\sim\ ,\ \cdots\cdots$$

などであるが、この右辺は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$$

においてそれぞれ $x=1\,,\,2\,,\,3\,,\,\cdots$ を代入した式である。他の x についても同様の計算で微分係数 $f'(x)$ が得られるので、各 x に微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数 $f'(x)$ とは、以下の式 (導関数の定義式と呼ばれる) で表されることがわかる。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}\quad\cdots①$$

注 1) 上式で $x+h=z$ とすると $f'(x)=\displaystyle\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\quad\cdots②$ となる。

注 2) 微分係数の場合と同様、数式のもつイメージをとらえることが重要である。①②の違いは平均変化率を計算する段階での 2 点の座標の設定の仕方であり、本質的な差はない。

注 3) $f(x)$ について導関数 $f'(x)$ を求めることが「微分」である。「微分」とは既にみたように極限計算に他ならない。なお、導関数 $f'(x)$ を「$f(x)$ の微分」ということもある。

(微分の基本公式)

以下はいずれもが極限計算を実行することにより得られた結果である。

(i) c が定数のとき $c'=0$

(ii) n は正の整数として $(x^n)'=nx^{n-1}$

(iii) 整式 $f(x)$, $g(x)$ について $\big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)+g'(x)$

(iv) 整式 $f(x)$ と定数 a について $\big(af(x)\big)'=af'(x)$

(v) 整式 $f(x)$, $g(x)$ について $\big(f(x)g(x)\big)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(vi) 整式 $f(x)$ と正の整数 n について $\big(\{f(x)\}^n\big)'=n\{f(x)\}^{n-1}\times f'(x)$

注 4) この公式を用いて導関数 $f'(x)$ を求めれば微分係数は単純な代入計算でわかる。例えば $f(x)=x^2$ について $f'(x)=2x$ であり $f'(3)=2\cdot 3=6$ である。特に指示がない場合微分係数はこのように求めればよい。

[*3] (1) 6 (2) 9 (3) 28 (4) 14

問題 6.2.1 *4

(1) $f(x)=x^2$ とする。定義式①を用いて $f'(x)$ を求めよ。

(2) $g(x)=-2x^3+5x+3$ とする。定義式②を用いて $g'(x)$ を求めよ。

(3) $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{1}{x}$ のそれぞれについて導関数を求めよ。

問題 6.2.2 *5

(1) $f(x)=2x^3+\dfrac{2}{5}x^2-7x-6$ について $f'(x)$ を求めよ。また $f'(5)$ を求めよ。

(2) x の関数 $y=2x^3-(a+1)x^2+3a^2x-a^4$ について導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(3) a の関数 $y=2x^3-(a+1)x^2+3a^2x-a^4$ について導関数 $\dfrac{dy}{da}$ を求めよ。

問題 6.2.3 *6

(1) $f(x)$ は微分可能(導関数がある)とする。微分の定義式②を用いることで $F(x)=\{f(x)\}^3$ について $F'(x)=3\{f(x)\}^2\times f'(x)$ であることを示せ。

(2) 以下の関数を微分せよ。

(i) $y=(x+3)^2$　　(ii) $y=(2x-7)^3$　　(iii) $y=\left(-\dfrac{2}{5}x+3\right)^4$

問題 6.2.4 *7

微分の基本公式(v)は極限計算において

$$\frac{f(z)g(z)-f(x)g(x)}{z-x}=\frac{\{f(z)-f(x)\}g(z)+f(x)\{g(z)-g(x)\}}{z-x}$$

という変形を考えることで示される。基本公式(v)が成り立つことを認めて以下の問いに答えよ。

(1) 以下の関数を微分せよ。

(i) $y=2x(x-1)^5$　(ii) $y=x^4(-3x+2)^3$　(iii) $y=(x+4)^2(4x-3)^2$

(2) $f(x)=(x-3)^2(4x+5)$ について $f'(x)=0$ となる x の値を求めよ。

---

*4 (1) $f'(x)=2x$　(2) $g'(x)=-6x^2+5$　(3) 順に $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'=-\dfrac{1}{x^2}$

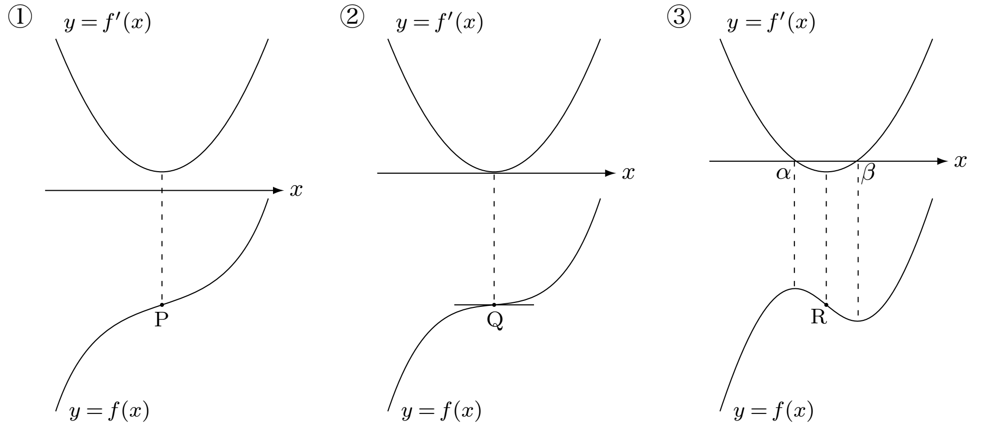
*5 (1) $f'(x)=6x^2+\dfrac{4}{5}x-7$, $f'(5)=147$　(2) $\dfrac{dy}{dx}=6x^2-2(a+1)x+3a^2$　(3) $\dfrac{dy}{da}=-4a^3+6xa-x^2$

*6 (1) 略　(2) (i) $y'=2(x+3)$　(ii) $y'=6(2x-7)^2$　(iii) $y'=-\dfrac{8}{5}\left(-\dfrac{2}{5}x+3\right)^3$

*7 (1) (i) $y'=2(x-1)^4(6x-1)$　(iii) $y'=x^3(-3x+2)^2(-21x+8)$　(iv) $y'=2(x+4)(4x-3)(8x+13)$
(2) 3 , $\dfrac{1}{6}$

6.3　3 次関数のグラフ

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフで、点 $(x,\, f(x))$ における接線の傾きは $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ である。この変化を追いかけることで $y = f(x)$ の増減はもとよりグラフの凹凸も分かり、かなり正確なグラフの概形が求まる。以下は a が正の場合についての分類である。



$a < 0$ の場合についても同様にすれば、やはりグラフの概形が説明され、併せて以下が成り立つことが分かる。

「3 次関数 $f(x)$ について

$f(x)$ が極値をもつ $\iff$ $y = f'(x)$ のグラフが x 軸と二点を共有する

$\iff$ $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ　」

注）① と ② では $f(x)$ はいずれも単調増加関数である。違いは点 P, Q における接線の傾きで、② ではこの傾きが 0 である。なお $f'(x)$ の変化を考えることで、曲線 $y = f(x)$ は点 P, Q, R から左側は上に凸で、右側は下に凸であることや、点 P, Q, R について対称であることも分かる。(この辺りは単に増減表を書いても分からない部分。)

問題 6.3.1 [*8]

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 3ax + 5$ が実数全体で単調増加であるための条件を求めよ。

(2) $y = 2x^3 - (a+1)x^2 + a^2x + 5$ が極値をもつための条件を求めよ。

(3) 以下の各関数について極大値を求めよ。

(i) $y = 2x^3 - 3ax^2 - 12a^2x + 1$　　(ii) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(k-1)x^2 + (2k+2)x$

[*8] (1) $a \geqq 1$　(2) $\dfrac{1-\sqrt{6}}{5} < a < \dfrac{1+\sqrt{6}}{5}$

(3) (i) $a = 0$ ならば存在しない，$a > 0$ のとき $4a^3 + 1$，$a < 0$ のとき $-20a^3 + 1$

(ii) $k = -3$ のとき存在しない，$k > -3$ のとき $2k + \dfrac{10}{3}$，$k < -3$ のとき $-\dfrac{1}{6}(k+1)^2(k+7)$

問題 6.3.2 [*9]

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx - 2$ について以下の問いに答えよ。

(1) $x = -1\,,\,1$ において極値をとるとき $a\,,\,b$ の値を求めよ。

(2) $x = 2$ において極小となるような $a\,,\,b$ についての条件を求めよ。

問題 6.3.3 [*10]

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$（$a > 0$）について以下の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ を最小にする x の値 α を求めよ。

(2) $y = f(x)$ のグラフを曲線 C とする。これを $(-\alpha\,,\,-f(\alpha))$ 平行移動することで、曲線 C が点 $(\alpha\,,\,f(\alpha))$ に関して対称であることを示せ。

注）(2)は $y = f'(x) = 3a(x-\alpha)^2 + q$ から積分を用いて計算する方法もある。

[*9] (1) $a = 0\,,\,b = -3$　　(2) $4a + b + 12 = 0$ かつ $a > -6$

[*10] (1) $\alpha = -\dfrac{b}{3a}$　　(2) 平行移動後の曲線は $y = ax^3 + \left(-\dfrac{b^2}{3a} + c\right)x$

6.4 接線

接線を求める場合、接点が分かっているかどうかは大きな分岐点である。

① 接点が分かっている場合。

このとき接点が直線の一つの通過点であり、あとは方向(多くの場合傾き)が問題になる。曲線 $y=f(x)$ の接線については特に微分係数を用いればよい。なお、2 次曲線についての公式も同様に考えて得られる結果である。

(i) 曲線 $y=f(x)$ の点 $(t\,,\,f(t))$ における接線の方程式は $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

(ii) 円 $x^2+y^2=r^2$ の点 $(a\,,\,b)$ における接線は $ax+by=r^2$

(iii) 楕円または双曲線 $ax^2+by^2=1$ の点 $(p\,,\,q)$ における接線は $apx+bqy=1$

(iv) 放物線 $y^2=4px$ の点 $(a\,,\,b)$ における接線は $by=2p(x+a)$ で、$x^2=4py$ の点 $(a\,,\,b)$ における接線は $ax=2p(y+b)$

② 接点が分かっていない場合。さらに次の二つの方法がある。

(方法 1) 重解条件などで、どんな直線が接線になるかを考える。

(方法 2) 曲線のすべての接線の中で(→注参照)、どれが条件を満たすか考える。

注) 例えば $y=f'(t)(x-t)+f(t)\ \cdots(*)$ において $t=0$ を代入すれば $(0\,,\,f(0))$ における接線が、また $t=1$ を代入すれば $(1\,,\,f(1))$ における接線が得られる。このように曲線のどの接線も $(*)$ の t に何らかの値を代入したものである。すなわちすべての実数 t について $(*)$ を考えれば、曲線 $y=f(x)$ の接線がすべて考えられることになる。

問題 6.4.1 *11

(1) 放物線 $y=x^2$ の点 $(2\,,\,4)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 $y=-x^3+2x+1$ の x 座標が -2 である点における接線の方程式を求めよ。

(3) 曲線 $y=x^3+x$ の点 $(t\,,\,t^3+t)$ における接線が点 $(2\,,\,2)$ を通るという。このとき t の値と接線の方程式を求めよ。

問題 6.4.2 *12

(1) 点 $(2\,,\,0)$ から放物線 $y=x^2$ に引いた接線を以下の 2 通りの方法で求めよ。

(i) 重解条件から傾きを求める。

(ii) 放物線の接線すべての中でどれが条件に合うかを考える。

(2) 点 $\left(\dfrac{14}{5}\,,\,\dfrac{32}{5}\right)$ から曲線 $y=x^3$ に引いた接線を求めよ。

(3) 2 曲線 $y=x^2+x-2\,,\ y=2x^2-9x+5$ の両方に接する直線の方程式を求めよ。

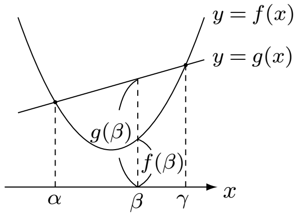
---

*11 (1) $y=4x-4$ (2) $y=-10x-15$ (3) $t=0\,,\,3$ で、対応する接線は順に $y=x\,,\ y=28x-54$

*12 (1) $y=0\,,\ y=8x-16$ (2) $y=3x-2\,,\ y=48x-128\,,\ y=\dfrac{48}{25}x+\dfrac{128}{125}$ (3) $y=-x-3\,,\ y=23x-123$

6.5　グラフと方程式・不等式の実数解

ある値 α が $f(x)=g(x)$ の解であるかどうかは、これを両辺に代入して同じ値になるかそうでないかで確かめられる。例えば $x^2=-x+2$ において $x=1$ のときの両辺の値は等しいが、$x=0$ のときの値は同じでない。これは $x=1$ は $x^2=-x+2$ の解であるが $x=0$ は解でないことを示している。そして、このような操作をすべての実数に対して実行し両辺の値を比べれば、方程式の実数解はすべて求まることになる。しかし、当然のことながら実数とは無数にあり、また代入したからといって大小がわかるとは限らないので、これは実現不可能な方法である。



その代わりといっては何だが、グラフを用いることは解の配置を考える有効な手段である。例えば右図の場合(値がわかるかどうかは別にして)$x=\alpha$, γ は $f(x)=g(x)$ の解である(→ 注)。そして $\alpha<x<\gamma$ であるすべての x が(具体的な代入計算をすることなく) $f(x)=g(x)$ の解でないことがわかる。例えば $f(\beta)<g(\beta)$ であるが、他の x についても $f(x)$, $g(x)$ の大小関係をこのグラフから知ることが出来て $f(x)<g(x)$ などの解もこのグラフから求まる。

さて、以下のことを知りたいような場合に、グラフは有効な道具となる。

(i) $f(x)=g(x)$ の実数解の個数や配置。
(ii) $f(x)=g(x)$ の実数解は大雑把にどんな値であるか。
(iii) $f(x)$ と $g(x)$ の大小関係が x の値に応じてどう変化するか。

なおグラフについては余式を変形して別の関数の関係で考えた方が良い場合も多い。例えば未知の定数 a を分離して $h(x)=a$ という形にしてから $y=h(x)$, $y=a$ のグラフを考える問題は頻出である。

注 1) (i)(ii)については次の同値関係が重要である。

「α は $f(x)=g(x)$ の実数解
$\iff$ α は 2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ の共有点の x 座標の一つ」

注 2) 3 次や 4 次などの方程式・不等式では最初に因数分解出来るかどうかは大きな分かれ目である。可能ならばより低次の式を考えれば良いことになり、問題はかなり楽になる。

問題 6.5.1 [*13]

(1) すべての実数 x について $x^2-2x+3\geqq ax$ が成り立つための定数 a についての条件をいえ。
(2) x についての方程式 $x^3-3x^2+3-a=0$ の異なる実数解の個数が定数 a の値に応じてどう変化するかを答えよ。また個数が 3 であるとき、最小の解 α はどのような値であるか。
(3) x の 3 次方程式 $x^3+(a-3)x^2-(3a-1)x-3=0$ が異なる 3 つの実数解をもつような a についての条件を求めよ。
(4) 0 以上のすべての x について $2x^3-3(a-1)x^2-6ax+a+3\geqq 0$ が成り立つような定数 a についての条件を求めよ。

---

*13 (1) $-2-2\sqrt{3}\leqq a\leqq -2+2\sqrt{3}$ (2) $a<-1$, $a>3$ ならば 1 個, $a=-1$, 3 ならば 2 個, $-1<a<3$ ならば 3 個。$-1<\alpha<0$ (3) $a<-\dfrac{10}{3}$, $-\dfrac{10}{3}<a<-2$, $a>2$ (4) $-3\leqq a\leqq 1$ (5) $a<1$, $a>1+\sqrt{3}$

(5) 1 以上のすべての x について $x^3-3ax+2>0$ が成り立つような定数 a についての条件を求めよ。

（二次方程式の解の配置問題）

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の配置問題もグラフを利用して解くのがわかりやすいだろう。特に次の 2 点がポイントになることが多い。

① 考えるべき解を含む区間の端点に対してグラフがどこを通っているか。(→注)

② グラフの頂点の位置。

注 1) 例えば条件が「正の解」という場合、区間は $x>0$ で、この端点は $(0,0)$ である。グラフとこの端点との位置関係は

(i) 上を通る (ii) 下を通る (iii) その端点を通る

の 3 通りであり、これはグラフの y 切片がそれぞれ正・負・0 であることに対応する。

また条件が「0 以上 1 以下」ならば区間は $0\leqq x\leqq 1$ であって端点は $(0,0),(1,0)$ の 2 点になる。この場合も同様に考えれば良いが、二つの端点とグラフの位置関係は組合せると 9 通りになってしまい、それでは大変である。まとめて

$$f(0)\cdot f(1)>0,\ f(0)\cdot f(1)=0,\ f(0)\cdot f(1)<0$$

の 3 通りで考えるということを覚えておきたい。

注 2) 上記はすべて x 軸との位置関係で考える場合の説明である。問題によっては放物線と (x 軸以外の)定点通過直線の位置関係で考えた方が簡単なときもある。

問題 6.5.2 [*14]

x の 2 次方程式 $x^2+ax-a^2+1=0$ について以下の問いに答えよ。

(1) 正の解と負の解をもつような定数 a についての条件を求めよ。

(2) 2 つの異なる正の解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(3) 2 つの正の解をもつような a についての条件を求めよ。

(4) $-1<x<1$ である 2 つの解をもつような a の条件を求めよ。

(5) $0\leqq x\leqq 1$ である解をもつような a の条件を求めよ。

(6) $0<x<1$ である解をもつような a の条件を求めよ。

問題 6.5.3 [*15]

(1) $a>0$ とする。放物線 $y=x^2+3$ と直線 $y=a(x-1)$ が接するときの a の値とそのときの接点の座標を求めよ。

(2) x の方程式 $x^2-ax+a+3=0$ が 2 以上 4 以下の解をもつような定数 a の条件を求めよ。

(3) x の不等式 $x^2-ax+a+3<0$ を満たす正の整数 x がただ一つ存在するような定数 a の条件を求めよ。

[*14] (1) $a<-1,\ a>1$ (2) $-1<a<-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (3) $-1<a\leqq-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (4) $-1<a\leqq-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\leqq a<1$ (5) $-1\leqq a\leqq-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ 1\leqq a\leqq 2$ (6) $-1<a\leqq-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ 1<a<2$

[*15] (1) $a=6,\ (3,12)$ (2) $6\leqq a\leqq 7$ (3) $6<a\leqq\dfrac{19}{3}$

6.6　積分の計算

① 微分して $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の原始関数という。定数項の違いは微分するとなくなるので、原始関数は一意的ではない。すなわち $F'(x)=f(x)$ とすると $(F(x)+c)'=f(x)$ であり $F(x)$, $F(x)+1$, $F(x)-2$ などはすべて $f(x)$ の原始関数である。

② $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ として

$\displaystyle\int f(x)dx=F(x)+C$ （C は積分定数）, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ $\left(=[F(x)]_a^b \text{ と表す}\right)$

③ 積分の公式

(i) 0 以上の整数 n について $\displaystyle\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

(ii) 0 以上の整数 n について $\displaystyle\int (x+a)^n dx=\frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}+C$

(iii) $\displaystyle\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$, $\displaystyle\int af(x)dx=a\int f(x)dx$

$\displaystyle\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta g(x)dx$, $\displaystyle\int_\alpha^\beta af(x)dx=a\int_\alpha^\beta f(x)dx$

(iv) $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx$, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx$

(v) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

注）(ii)に関しては 6.2 節(→ 微分の基本公式(vi))参照のこと。

問題 6.6.1 [*16]

以下の計算をせよ。なお n は正の整数である。

(1) $\displaystyle\int (x^2+4x-3)dx$

(2) $\displaystyle\int (2x-1)(x+2)(x^2-3)dx$

(3) $\displaystyle\int (ax^3+x^2t-2xt^3-5t^4)dx$

(4) $\displaystyle\int (ax^3+x^2t-2xt^3-5t^4)dt$

(5) $\displaystyle\int x^n(x-1)dx$

(6) $\displaystyle\int x(x-1)^{n-1}dx$

(7) $\displaystyle\int_{-2}^1\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)dx$

問題 6.6.2 [*17]

(1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))dx=3$, $\displaystyle\int_\alpha^\beta (-3f(x)+g(x))dx=5$ のとき定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(x)dx$, $\displaystyle\int_\beta^\alpha f(x)dx$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{3-\sqrt{10}}(-4x^2+\sqrt{5}x+3)dx+\int_{3-\sqrt{10}}^1(-4x^2+\sqrt{5}x+3)dx$ を計算せよ。

[*16] (1) $\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+C$ (2) $\frac{2}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+C$
(3) $\frac{a}{4}x^4+\frac{t}{3}x^3-t^3x^2-5t^4x+C$ (4) $-t^5-\frac{x}{2}t^4+\frac{x^2}{2}t^2+ax^3t+C$
(5) $\frac{1}{n+2}x^{n+2}-\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (6) $\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}+\frac{1}{n}(x-1)^n+C$ (7) $\frac{3}{2}$

[*17] (1) 順に 2 , 1 　(2) $\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{5}}{2}$

問題 6.6.3 [*18]

(1) $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ とする。$x-\alpha=u$ として $f(x)$ を x を含まない u の式で表せ。

(2) 積分の公式(v)を証明せよ。

(3) 以下の定積分の値を求めよ。

(i) $\displaystyle\int_{-2}^{3}(x+2)(x-3)dx$　(ii) $\displaystyle\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}(5x-1)(2x-1)dx$　(iii) $\displaystyle\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(x^2-2x-1)dx$

(iv) $\displaystyle\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(x^2-2x-3)dx$

---

*18 (1) $u^2+(\alpha-\beta)u$　(2) 略　(3) (i) $-\dfrac{125}{6}$　(ii) $-\dfrac{9}{200}$　(iii) $-\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$　(iv) $-\dfrac{20}{3}\sqrt{2}$

6.7　定積分で表される関数

① x の関数 $G(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ の性質として以下は重要である。

（i）$G'(x)=f(x)$　　　（ii）$G(a)=0$

注）(i)の証明は $F'(t)=f(t)$ として $G(x)=\Big[F(t)\Big]_a^x=F(x)-F(a)$ であることを用いる方法と、次節で確認するが $G(x)$ と面積との関係をよりどころとして

$$G'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt$$

であることから「はさみうちの原理」を用いる方法がある。なお「はさみうちの原理」自体は数 III の内容である。

② 高校数学で $\displaystyle\int_a^b f(t)dt\cdots(*)$ という式が与えられた場合、この $f(t)$ とは $f(x)$ に $x=t$ を代入した結果であり、x が含まれない式である。したがってまた $(*)$ は x について定数である。

問題 6.7.1 *19

(1) $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2+3x$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_1^x f(u)du=x^3-ax+2$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a を求めよ。

(3) 以下のそれぞれについて $F'(x)$ を求めよ。

（i）$F(x)=\displaystyle\int_a^x |t-1|dt$　　　（ii）$F(x)=\displaystyle\int_2^x (x-t)dt$

問題 6.7.2 *20

(1) $f(x)=x^2+\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)dt\ \cdots①$ を満たす $f(x)$ は、どのような関数か。

(2) ①を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

問題 6.7.3 *21

以下の条件を満たす関数 $f(x)$ をそれぞれ求めよ。

(1) $f(x)=3x^2+2x\displaystyle\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt$　　(2) $f(x)=x^3+x^2\displaystyle\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt$

(3) $f(x)=x+\displaystyle\int_0^2 (x^2-t)f(t)dt$

問題 6.7.4 *22

(1) 以下の条件を満たす関数 $f(x)$, $g(x)$ と定数 a を求めよ。

$$\int_1^x f(t)dt=x^2+2x+\int_0^1 g(x)dx\ ,\ g(x)=x^2\int_0^1 f(t)dt+ax+\int_{-1}^2 g(t)dt$$

(2) 以下の条件を満たす関数 $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x^3+x\int_0^1 g(t)dt+3\ ,\ x\int_0^x f(t)dt=\int_0^x g(t)dt+2x$$

---

*19 (1) $f(x)=2x+3$, $a=0$ または -3　(2) $a=3$, $f(x)=3x^2-3$　(3) (i) $|x-1|$ (ii) $x-2$

*20 (1) 2 次関数で、適当な定数 A を用いて $f(x)=x^2+A$　(2) $f(x)=x^2-\dfrac{2}{3}$

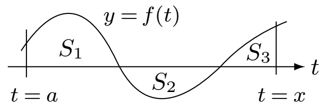
*21 (1) $f(x)=3x^2+2x-1$　(2) $f(x)=x^3-\dfrac{45}{28}x^2-\dfrac{37}{28}$　(3) $f(x)=\dfrac{2}{9}x^2+x-\dfrac{32}{27}$

*22 (1) $f(x)=2x+2$, $g(x)=3x^2-2x-3$, $a=-2$ (2) $f(x)=x^3+\dfrac{5}{2}x+3$, $g(x)=\dfrac{5}{4}x^4+\dfrac{15}{4}x^2+6x-2$

6.8 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の図形的意味

応用問題を解くためには定積分のもつ図形的意味の理解は重要であり、ここで説明しておく。

いま ty 平面において $a \leqq t \leqq x$ の範囲にあって $y = f(t)$ のグラフと t 軸に挟まれた部分を考える。このうち t 軸よりも上にある領域の面積を T, t 軸よりも下にある領域の面積を U として関数 $S(x)$ ($x \geqq a$) を



$$S(x) = T + (-U)$$

によって定義する。(例えば右上図の場合 $S(x) = S_1 - S_2 + S_3$) するとこの関数 $S(x)$ は

① $S'(x) = f(x)$ (→ 注 1) ② $S(a) = 0$

という性質をもつのだが、これはまさに前節で見た $G(x)$ の性質であり、2 つの関数 $S(x)$ と $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ が、実は同一の関数であることがわかる。なお $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ はこの x に b を代入したものであり、$a \leqq t \leqq b$ の範囲で $y = f(t)$ と t 軸の囲む部分について上記の操作で得られる値になる。

注 1) やはり最後ははさみうちの原理を使うことになるが $S'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$ を考える。特にこの分子について $h > 0$ のとき、$f(t)$ ($x \leqq t \leqq x+h$) の最小値・最大値をそれぞれ m, M として $mh \leqq S(x+h) - S(x) \leqq Mh$ であることが重要である。面積をイメージすればこの不等式が成り立つことの理解はそう難しくないはずである。

注 2) $S(x)$ の成り立ちから以下のことがわかる。$f(x)$ は連続関数として

(i) $y = f(x)$ が奇関数すなわちグラフが原点対称のとき $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

(ii) $y = f(x)$ が偶関数すなわちグラフが y 軸対称のとき $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

問題 6.8.1 *23

$y = f(x)$ ($x \geqq 0$) のグラフは、点 $\mathrm{P}_n(3n, (-1)^n)$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$) を順につないだ折れ線であるとする。関数 $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ ($x \geqq 0$) について以下の問いに答えよ。

(1) $G(1)$, $G(5)$, $G(8) - G(5)$ の値をそれぞれいえ。

(2) $G(x)$ の最大値と最小値をいえ。

問題 6.8.2 *24

(1) $y = f(x)$ は連続関数で、グラフは $(a, 0)$ に関して点対称で、直線 $x = c$ に関して線対称である。さらに $\displaystyle\int_c^{c+1} f(x)dx = -2$ であるとき定積分 $\displaystyle\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx$, $\displaystyle\int_{c-1}^{c+1} f(x)dx$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) n は正の整数とする。$\displaystyle\int_0^1 ax^2\,dx = \sqrt{2}$ であるとき、定積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^n - x^3 + ax^2 + 4x + 5)dx$ の値を求めよ。

*23 (1) 順に $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ (2) 順に $\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{4}$

*24 (1) 順に 0, -4 (2) n が奇数のとき $2\sqrt{2} + 10$, n が偶数のとき $\frac{2}{n+1} + 2\sqrt{2} + 10$

問題 6.8.3 [*25]

(1) $y = x|x-1|$ について、定義域を分けることで絶対値を外しグラフを描け。

(2) 積分区間を分けることで $\displaystyle\int_{-1}^{3} x|x-1|dx$ を計算し、この定積分の値を求めよ。

問題 6.8.4 [*26]

(1) $\alpha+\gamma=2\beta$ のとき $y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のグラフが点 $(\beta, 0)$ に関して対称であることを、平行移動を用いて示せ。

(2) $\alpha+\gamma=2\beta$ のときの定積分 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\gamma}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx$ の値をいえ。

(3) (2)の事実を用いることで $\displaystyle\int_{\alpha}^{\gamma}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx = -\frac{1}{6}\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}-\beta\right)(\gamma-\alpha)^3$ であることを示せ。

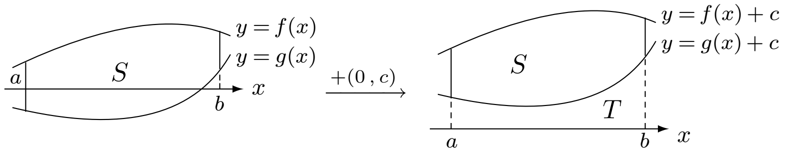
[*25] (1) $x \leqq 1$ のとき $y=x(1-x)$, $x \geqq 1$ のとき $y=x(x-1)$ (グラフは略) (2) 4

[*26] (1) 略　(2) 0　(3) 略

6.9　面積と定積分

前節で触れたことから区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に 0 以上である $f(x)$ について $y=f(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x=a$, $x=b$ の囲む部分の面積は $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ \cdots(*)$ である。

また区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ である 2 つの関数について $y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフと直線 $x=a$, $x=b$ の囲む部分の面積は $\displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))dx$ であることが以下のようにしてわかる。



すなわち $a \leqq x \leqq b$ において $g(x)+c \geqq 0$ となるような c を選んで上図のようになり

$$S=(S+T)-T=\int_a^b (f(x)+c)dx-\int_a^b (g(x)+c)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

注 1）最初の$(*)$も $\displaystyle\int_a^b (f(x)-0)dx$ であり、上式と同じ構造である。面積計算のこの形をつくるためにはグラフの上下関係を知る必要があり、不等式を解く能力は不可欠である。

注 2）上下関係が区間によって入れ替わるような場合は、積分区間を分けて計算することになる。

注 3）$(f(x)-g(x))dx$ が細長い長方形の面積であると解釈することは立式の手助けになり、覚えておきたい。(定積分を極限から定義すれば、この解釈は自然なのだが・・)

問題 6.9.1 *27

(1) $y=x^2+1$, $x=-2$, $x=2$ および x 軸の囲む部分の面積を求めよ。

(2) $y=-x^2+3x-2$ と x 軸の囲む部分の面積を求めよ。

(3) $y=x^3-2x^2$ と x 軸の囲む部分の面積を求めよ。

(4) $y=x^3-x^2-2x$ と x 軸の囲む部分の面積を求めよ。

問題 6.9.2 *28

(1) 曲線 $y=2x^2+3x$, $y=-2x-4$, $x=-1$, $x=2$ の囲む部分の面積を求めよ。

(2) 曲線 $y=\sqrt{x}$, $x=0$, $y=1$, $y=2$ の囲む部分の面積を求めよ。

(3) $-1 \leqq x \leqq 2$ にあって(縦方向に見て)$y=2x^2+3x$, $y=-2x+7$ のグラフの間にある部分の面積を求めよ。

(4) 曲線 $C: y=-3x^2+4x-1$ の x 座標が 0 , 1 である点における接線をそれぞれ l_1, l_2 とする。C , l_1, l_2 の囲む部分の面積を求めよ。

---

*27 (1) $\dfrac{28}{3}$　(2) $\dfrac{1}{6}$　(3) $\dfrac{4}{3}$　(4) $\dfrac{37}{12}$

*28 (1) $\dfrac{51}{2}$　(2) $\dfrac{7}{3}$　(3) $\dfrac{107}{6}$　(4) $\dfrac{1}{4}$

問題 6.9.3 [*29]

(1) $0 < a < 2$ とする。2 曲線 $y = x^2 + ax + 1$, $y = 2x + a$ について以下の問いに答えよ。

(i) 交点の x 座標を求めよ。

(ii) 2 曲線の囲む部分のうち $x \geqq 0$ にあるものの面積を求めよ。

(2) $b \fallingdotseq 0$ とする。$f(x) = x^2 - x$, $g(x) = (b+1)x^2 - \dfrac{2}{b}$ について以下の問いに答えよ。

(iii) 不等式 $f(x) > g(x)$ の解を求めよ。

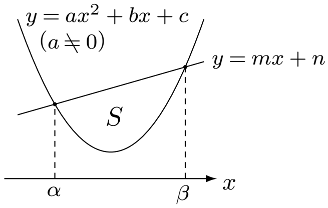
(iv) 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の囲む部分のうち $x \geqq 0$ にあるものの面積を求めよ。

（補足）

放物線と直線、あるいは放物線と放物線などが囲む面積を求める場合、以下の公式(既出)が活躍する。

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

例えば右図の面積 S は $S = \dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ であり、積分の計算をしないで結果を知ることが出来る。



注）その都度同じ構造の計算になるので、その流れで得られる結果を公式という形でまとめて、積分とは異なる次元の計算で答を知ることが出来る、というのがより正確な言い方である。なお記述式試験の答案としては、当然のことながら積分の立式の省略は不可である。

問題 6.9.4 [*30]

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = lx^2 + mx + n$ ($a \fallingdotseq l$) について $f(x) = g(x)$ は異なる 2 つの実数解 α, β をもつとする。このとき解と係数の関係から $\alpha + \beta = \boxed{\text{ア}}$, $\alpha\beta = \boxed{\text{イ}}$ である。したがって a , l , α , β を用いて因数分解すると $f(x) - g(x) = \boxed{\text{ウ}}$ となる。

(2) 以下のグラフの囲む部分の面積を求めよ。

(i) 放物線 $y = x^2 - 4x - 5$ と x 軸

(ii) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 3$

(iii) 放物線 $y = -x^2 + 4$ と直線 $y = x + 2$

(iv) 放物線 $y = 2x^2 - 5x + 5$ と直線 $y = 5x - 3$

(v) 放物線 $y = -6x^2 + 4$ と直線 $y = x + 2$

(vi) 放物線 $y = x^2 + 1$ と放物線 $y = -x^2 + 3x$

(vii) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 4$

(viii) 放物線 $y = \dfrac{1}{3}x^2$ と点 $(1, 1)$ を通って傾きが a の直線

(ix) 2 曲線 $y = x^n + 2x^2 - x + 1$, $y = x^n + x^2 - x + 4$ (ただし n は正の整数)

[*29] (1) (i) $1, 1-a$　(ii) $0 < a \leqq 1$ のとき $\dfrac{1}{6}a^3$, $1 \leqq a < 2$ のとき $\dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{3}$

(2) (iii) $b > 0$ のとき $-\dfrac{2}{b} < x < \dfrac{1}{b}$, $b < 0$ のとき $x < \dfrac{1}{b}, x > -\dfrac{2}{b}$　(iv) $b > 0$ のとき $\dfrac{1}{6b^2}$, $b < 0$ のとき $\dfrac{10}{3b^2}$

[*30] (1) ア $-\dfrac{b-m}{a-l}$　イ $\dfrac{c-n}{a-l}$　ウ $(a-l)(x-\alpha)(x-\beta)$

(2) (i) 36　(ii) $\dfrac{32}{3}$　(iii) $\dfrac{9}{2}$　(iv) 9　(v) $\dfrac{343}{216}$　(vi) $\dfrac{1}{24}$　(vii) $\dfrac{20}{3}\sqrt{5}$　(viii) $\dfrac{1}{18}\left(\sqrt{9a^2-12a+12}\right)^3$　(ix) $6\sqrt{3}$