高校数学 Web 問題集

−basic 5−

(利用上の注意点)

この問題集のほとんどはオリジナルに作成されたものです。個人が自らの学習のためにこのファイルを利用することは構いませんが、商用利用および著作権の所在が不明瞭になるような形での二次配布については、固くその行為を禁止致します。特に説明部分の記述についての著作権は当サイト「ky の書架」に帰属しますので御注意下さい。なお高校の授業等での利用を希望される方は問い合わせフォーム(TOP ページにアクセスすると“問い合わせ” のメニューがあります)にて御連絡下さい。

また間違い等(おそらくたくさんあります)を発見された場合にも御連絡いただけると助かります。

最終更新日 2010.6/27

web サイト「ky の書架」にはこれ以外にも「ウィルソンの定理の初等的証明」・「大学入試の整数問題」などのファイルがあります。興味のある方は url を直接入力するか、サイト名で google 検索してアクセスして下さい。(yahoo 検索ではヒットしないかもしれません。)

5　図形と式

5.1　直線の方程式

直線の方程式は、条件に応じて、いくつかのタイプがある。

① xy 平面で、点 $(a\,,\,b)$ を通って傾きが m である直線は

$$y = m(x-a)+b$$

また y 軸に平行な直線は $x=a$ である。

② $ab \neq 0$ とする。xy 平面で 2 点 $(a\,,\,0)\,,\,(0\,,\,b)$ を通る直線の方程式(切片方程式)は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

③ xy 平面で、点 $(x_0\,,\,y_0)$ を通って $\overrightarrow{n}=(a\,,\,b)$ を法線ベクトルとする直線は

$$\overrightarrow{n}\cdot(x-x_0\,,\,y-y_0)=0 \quad \text{すなわち} \quad a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

また点 $(x_0\,,\,y_0)$ を通って $\overrightarrow{u}=(a\,,\,b)$ を方向ベクトルとする直線は

$$\overrightarrow{u} \,/\!/\, (x-x_0\,,\,y-y_0) \quad \text{すなわち} \quad b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$$ （→3.5 ④参照）

なお逆に

直線 $ax+by+c=0 \perp \overrightarrow{n}\,\bigl(=(a\,,\,b)\bigr)$

である。

④ 位置ベクトルが $\overrightarrow{a}$ で表される点を通って $\overrightarrow{u}$ を方向ベクトルとする直線のベクトル方程式は

$$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{u}$$ （t は実数全体）

である。特に xy 平面上で、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}=(a_0\,,\,b_0)\,,\ \overrightarrow{u}=(l\,,\,m)$ ならば

$$(x\,,\,y)=(a_0\,,\,b_0)+t(l\,,\,m)$$ （t は実数全体）

は点 $\mathrm{A}(a_0\,,\,b_0)$ を通って $\overrightarrow{u}$ を方向ベクトルとする直線の方程式である。空間では

$$(x\,,\,y\,,\,z)=(a_0\,,\,b_0\,,\,c_0)+t(l\,,\,m\,,\,n)$$ （t は実数全体）

のようになる。

問題 5.1.1 [*1]

(1) 点 $(0\,,\,1)$ を通って傾きが 3 である直線の方程式を求めよ。

(2) 点 $(-2\,,\,-3)$ を通って傾きが 5 である直線の方程式を求めよ。

(3) 2 点 $(1\,,\,-2)\,,\,(-3\,,\,-1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

(4) 2 直線 $2x+3y=7\,,\ y=x+4$ の交点と、点 $(a\,,\,1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

(5) $y=x^2(x-1)$ の、点 $(2\,,\,4)$ における接線の方程式を求めよ。

(6) 2 点 $(2\,,\,0)\,,\,(0\,,\,-3)$ を通る直線の方程式を求めよ。

(7) 2 点 $(\sin\theta\,,\,0)\,,\,(0\,,\,\cos\theta)$ を通る直線の方程式を求めよ。

[*1] (1) $y=3x+1$　(2) $y=5x+7$　(3) $y=-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}$　(4) $\Bigl(a=-1$ のとき $x=-1$ それ以外のとき $y=\dfrac{-2}{a+1}x+\dfrac{3a+1}{a+1}\Bigr)$ あるいはまとめて $2x+(a+1)y=3a+1$　(5) $y=8x-12$　(6) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-3}=1$　(7) $x\cos\theta+y\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$

問題 5.1.2 [*2]

(1) 点 $(0, 0)$ を通って $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ に直交する直線と、平行な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

(2) 点 $(-2, 1)$ を通って $\overrightarrow{u} = (a, a+1)$ に直交する直線と、平行な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

(3) 円 $x^2 + y^2 = 1$ の、点 (x_1, y_1) における接線の方程式を求めよ。

問題 5.1.3 [*3]

直線のベクトル方程式を用いて、以下の問いに答えよ。

(1) 点 $(1, 5)$ から直線 $3x + 4y = -2$ に下ろした垂線の足の座標を求めよ。

(2) 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離公式 $h = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を証明せよ。

(3) xyz 空間で 2 点 $(1, -4, -10), (-3, 4, 2)$ を通る直線と、yz 平面, zx 平面との交点をそれぞれ求めよ。

[*2] (1) 順に $x + 2y = 0$, $2x - y = 0$　(2) 順に $ax + (a+1)y + a - 1 = 0$, $(a+1)x - ay + 3a + 2 = 0$　(3) $x_1x + y_1y = 1$

[*3] (1) $(-2, 1)$　(2) 略　(3) 順に $(0, -2, -7), (-1, 0, -4)$

5.2　2 直線の位置関係

① 2 直線 $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$ の平行条件・直交条件は順に

$m_1=m_2$, $m_1m_2=-1$

である。

② 2 直線 $ax+by+c=0$, $px+qy+r=0$ の直交条件・平行条件は、それぞれの法線ベクトル $\overrightarrow{n_1}=(a\,,\,b)$, $\overrightarrow{n_2}=(p\,,\,q)$ を考えて順に

$ap+bq=0$, $aq-bp=0$

である。(→3.5 ①,④参照)

③ 2 直線 $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$ が直交しないとき、2 直線それぞれが x 軸の正方向となす角を順に α , β とすると $\tan\alpha=m_1$, $\tan\beta=m_2$ なので、2 直線のなす角 $\theta=\alpha-\beta$ について以下の関係式が成り立つ。

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

問題 5.2.1 [*4]

(1) 2 直線 $y=ax+1$, $y=(2b^2+1)x-c$ は平行で、2 直線 $y=(a-1)x+d$, $y=\dfrac{2}{b}x$ は直交するような a, b の値を求めよ。

(2) 2 直線 $mx+(3m-1)y=7m+2$, $(m+1)x-(2m-6)y=-3m$ の位置関係が平行・一致・直交となるような m の値をそれぞれ求めよ。

問題 5.2.2 [*5]

(1) 2 直線 $3x-y=0$, $x-2y=0$ のなす鋭角を求めよ。

(2) 2 直線 $3\sqrt{3}x-y-1=0$, $\sqrt{3}x+2y+4=0$ のなす鋭角を求めよ。

(3) 直線 $y=5x+1$ とのなす鋭角が $\dfrac{\pi}{4}$ で、点 $(2\,,\,1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

[*4] (1) $a=\dfrac{9}{8}$, $b=-\dfrac{1}{4}$　(2) 平行 : $m=1,\,-\dfrac{1}{5}$　一致 : $m=-\dfrac{1}{5}$　直交 : $m=\dfrac{21\pm\sqrt{321}}{10}$

[*5] (1) $\pi/4$　(2) $\pi/3$　(3) $2x-3y=1$, $3x+2y=8$

5.3　円・球面の方程式

円の方程式も、直線の場合と同様、いくつかの表現がある。

① xy 平面上で中心が (a, b) で半径が r である円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

である。これは 2 点間の距離についての関係式に他ならない。また、上式は展開すると

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0 \quad \cdots(*)$$

という形になる。ただし逆に $(*)$ の形であっても、解の集合が円になるとは限らない。

② アポロニウスの円

ある平面上で、異なる 2 定点 A , B に対して $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=m:n$ で定まる点 P の軌跡は $m=n$ ならば線分 AB の垂直二等分線で、$m \fallingdotseq n$ ならば線分 AB の $m:n$ の内分点・外分点を直径の両端とする円になる。したがって $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:2$ などは円の方程式である。

③ 三角関数を用いた円の方程式

三角関数の定義(2.1 参照)より、$r>0$ として

$$(x, y)=(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) \ (0 \leqq \theta < 2\pi) \quad \cdots\cdots(*)$$

で定まる点 (x, y) の集合は、点 (a, b) を中心として半径が r の円である。この $(*)$ を、媒介変数 θ による円の方程式という。$(*)$ はベクトルを用いて表されることもある。

④ 円のベクトル方程式

異なる 2 定点 A , B に対して以下の関係式を満たす点 P の集合はいずれも円になる。

(i) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=r \ (r>0)$ 　　($\leftrightarrow$ 中心は点 A , 半径は r)

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ 　　($\leftrightarrow$ 線分 AB を直径とする円)

この (i), (ii), ③ の $(*)$ などを、円のベクトル方程式という。

問題 5.3.1 [*6]

(1) 中心が点 $(2, -6)$ で半径が $\sqrt{2}$ の円の方程式を求めよ。

(2) 中心が点 $(-3, 4)$ で原点を通る円の方程式を求めよ。

(3) 中心が直線 $y=2x+1$ 上にあって、2 点 $(2, 0), (4, 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

問題 5.3.2 [*7]

(1) 3 点 $(0, 0), (2, 1), (-1, -1)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(6, 2), \mathrm{B}(-3, -1), \mathrm{C}(5, -5)$ とする。$\triangle$ABC の外接円の中心と半径を、次の 2 通りの方法で求めよ。

　i) 垂直二等分線を考える。　　ii) $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ を用いる。

(3) 方程式 $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ の解の集合を xy 平面に図示すると、どのような図形になるか。

[*6] (1) $(x-2)^2+(y+6)^2=2$ (2) $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ (3) $(x-1)^2+(y-3)^2=10$

[*7] (1) $x^2+y^2-7x+9y=0$ (2) 中心 $(2, -1)$, 半径 5

(3) $\alpha^2+\beta^2-4\gamma<0$ のとき空集合 , $\alpha^2+\beta^2-4\gamma=0$ のとき一点 , $\alpha^2+\beta^2-4\gamma>0$ のとき円

問題 5.3.3 [*8]

(1) 原点をOとし、点 $A(4, 0)$ とする。点Pが $OP:AP=3:1$ を満たして変化するとき、$\triangle OAP$ の面積の最大値を求めよ。

(2) 平面上に線分ABと点Pがある。また線分ABを $m:n\,(m \fallingdotseq n)$ に内分・外分する点をそれぞれ C, D とする。

(i) $\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PD}$ をそれぞれ $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ で表せ。

(ii) $PA:PB=m:n$ で定まる点Pの軌跡は線分CDを直径とする円である。これを(i)の結果と $n^2\left|\overrightarrow{PA}\right|^2=m^2\left|\overrightarrow{PB}\right|^2$ を考えることで示せ。

問題 5.3.4 [*9]

点 $P(X, Y)=\left(\dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2}, \dfrac{1+4t+t^2}{1+t^2}\right)$ とする。t を変化させたときの点Pの描く曲線について以下の問いに答えよ。

(1) $t=\tan\theta$ とする。点 $P(X, Y)$ を θ を用いて表せ。

(2) 点Pはどのような曲線上にあるか。

問題 5.3.5 [*10]

平面上に $\triangle ABC$ と点Pがある。以下の条件を満たす点Pの集合はどのような図形か。

(1) $\left|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}\right|=2$

(2) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}-\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AP}=0$

問題 5.3.6 [*11]

(1) 2点 $(a, a^2), (a+1, -3a)$ を直径の両端とする円の方程式を、ベクトルの内積を用いて求めよ。

(2) 2直線 $ax-y+a+2=0$, $x+ay-4=0$ の交点は、a によらずある曲線上にある。この曲線の方程式を求めよ。

[*8] (1) 3　(2) (i) 順に $\dfrac{n\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}}{m+n}$, $\dfrac{n\overrightarrow{PA}-m\overrightarrow{PB}}{n-m}$ (ii) hint : $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=0$ をいう。

[*9] (1) $(X, Y)=(2\cos 2\theta, 1+2\sin 2\theta)$ (2) 円 $x^2+(y-1)^2=4$ 上にある。

[*10] (1) 点Bを中心とする半径2の円 (2) 三角形の重心が中心で点Aを通る円

[*11] (1) $x^2+y^2-(2a+1)x-(a^2-3a)y-3a^3+a^2+a=0$ (2) $x^2+y^2-3x-2y-4=0$

球面の方程式は平面が空間になるだけであって、円についてまとめた①②④と同様の表現がある。

①′ xyz 空間で中心が $(a\,,\,b\,,\,c)$ にあり、半径が r である円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

である。これも 2 点間の距離についての関係式に他ならない。上式を展開すると

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0\ \cdots(*)$$

という形になる。逆に$(*)$の形であっても、解の集合が球面になるとは限らないのも円の場合と同じである。

②′ アポロニウスの球面(という言い方はあまり聞かないが。)

ある平面上で、異なる 2 定点 A , B に対して $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=m:n$ で定まる点 P の軌跡は $m=n$ ならば線分 AB の垂直二等分線で、$m\fallingdotseq n$ ならば線分 AB の $m:n$ の内分点・外分点を直径の両端とする円であった。空間でこの条件を考えると点 P の軌跡は $m=n$ ならば線分 AB の垂直二等分面で、$m\fallingdotseq n$ ならば線分 AB の $m:n$ の内分点・外分点を直径の両端とする球面になる。したがって $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:2$ などは「空間」では球面の方程式になる。

④′ 球面のベクトル方程式

円の ④ の項にある「円」を「球面」に換えるだけである。

問題 5.3.7 [*12]

(1) 中心が点 $(3\,,\,-2\,,\,4)$ で半径が $\sqrt{3}$ の球面の方程式を求めよ。

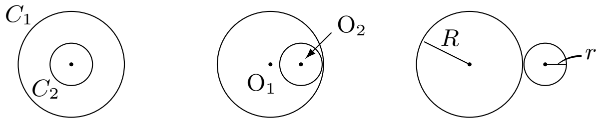
(2) 4 点 $(2\,,\,0\,,\,2)\,,\,(3\,,\,2\,,\,1)\,,\,(4\,,\,-2\,,\,0)\,,\,(1\,,\,2\,,\,-3)$ を通る球面の方程式を求めよ。また球面の中心の座標と半径をいえ。

(3) 中心が原点で半径が $\sqrt{8}$ である球面と、2 点 $(3\,,\,-2\,,\,-3)\,,\,(-1\,,\,6\,,\,9)$ を通る直線との交点の座標を求めよ。また原点から直線への垂線の足の座標を求めよ。

[*12] (1) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=3$ (2) 順に $x^2+y^2+z^2-4x+2z-4=0$, $(2,0,-1)$, 3
(3) 交点は $\left(\dfrac{13\mp\sqrt{15}}{7},\dfrac{2\pm2\sqrt{15}}{7},\dfrac{3\pm3\sqrt{15}}{7}\right)$(複号同順) , 垂線の足は $\left(\dfrac{13}{7},\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7}\right)$

5.4 2 円の位置関係

2 円の位置関係は「中心間の距離と半径の和および差」で定まる。以下のように中心が重なった状態から一方を動かしてゆくとわかりやすい。



$O_1O_2 = 0$ 〜 $R - r$ 〜 $R + r$ 〜

この図のようにすればどんな条件を考えればよいかはすぐにわかるが、一応まとめておく。なお上図では $R > r$ であるが、半径はどちらが大きくてもよい。すなわち 2 つの円 C_1, C_2 の中心と半径をそれぞれ O_1, R と O_2, r として

a_1）$O_1O_2 < |R - r| \iff C_1, C_2$ は共有点をもたず一方はもう一方の内部にある
a_2）$O_1O_2 = |R - r|$ かつ $R \fallingdotseq r \iff C_1, C_2$ の一方はもう一方の円に内接する
a_3）$O_1O_2 = |R - r|$ かつ $R = r \iff C_1, C_2$ は一致する
a_4）$|R - r| < O_1O_2 < R + r \iff C_1, C_2$ は 2 点を共有する
a_5）$O_1O_2 = R + r \iff C_1, C_2$ は外接する
a_6）$O_1O_2 > R + r \iff C_1, C_2$ は共有点をもたずそれぞれが互いの外部にある

問題 5.4.1 [*13]

(1) 点 $(1, 2)$ を中心とする半径 R の円と、点 $(4, 3)$ を中心とする半径 r の円が以下の位置関係になるような r の条件を $R = 2, 5$ のそれぞれの場合について答えよ。
(i) 外接する。 (ii) 内接する。 (iii) 2 交点をもつ。

(2) 点 $(0, 2)$ を中心とする半径 5 の円と、直線 $y = x$ 上の点 (a, a) を中心とする半径 1 の円が以下の位置関係になるような a の条件を答えよ。
(i) 外接する。 (ii) 内接する。 (iii) 2 交点をもつ。

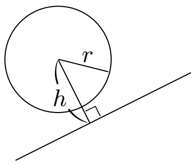
(3) 2 つの円 $(x - 1)^2 + (y - 2a)^2 = (a - 1)^2$, $\{x - (a + 1)\}^2 + (y + 1)^2 = 16$ が、内接・外接するような a の値を求めよ。ただし $a \fallingdotseq 1$ とする。

[*13] (1)（$R = 2$ のとき）(i) $r = \sqrt{10} - 2$ (ii) $r = \sqrt{10} + 2$ (iii) $\sqrt{10} - 2 < r < \sqrt{10} + 2$
（$R = 5$ のとき）(i) 存在しない (ii) $r = 5 \pm \sqrt{10}$ (iii) $5 - \sqrt{10} < r < 5 + \sqrt{10}$
(2) (i) $a = 1 \pm \sqrt{17}$ (ii) $a = 1 \pm \sqrt{7}$ (iii) $1 - \sqrt{17} < r < 1 - \sqrt{10}$, $1 + \sqrt{10} < a < 1 + \sqrt{17}$
(3) 内接 $\dfrac{1 - \sqrt{33}}{4}$, $\dfrac{-7 + \sqrt{145}}{4}$ 外接 $\dfrac{-7 - \sqrt{145}}{4}$, $\dfrac{1 + \sqrt{33}}{4}$

5.5 円と直線

円と直線との位置関係などは、円の半径と中心から直線までの距離、を考えるとわかりやすい。円の半径を r とし、中心から直線までの距離を h として、以下の関係が成り立つ。

a_1) $h < r \iff$ 円と直線は 2 点を共有する
a_2) $h = r \iff$ 円と直線は接する
a_3) $h > r \iff$ 円と直線は共有点をもたない



また円と直線が 2 交点 P, Q をもつとき、円の中心 O から直線への垂線の足を H として、$\mathrm{PH} = \mathrm{QH}$ かつ $\triangle\mathrm{OHP}$ は直角三角形、である。これから半径 r と OH, PQ についての関係を考えることができる。

問題 5.5.1 [*14]

(1) 円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = mx + 3$, $y = -2x + n$ のそれぞれとが接するような m, n の値を求めよ。 (判別式・直線までの距離・三角比利用の 3 通りある。)

(2) 円 $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ と直線 $(m+1)x + 2my = 3$ が異なる 2 点を共有するような m の値の範囲を求めよ。またそのとき、直線が円によって切り取られる部分の長さを求めよ。

補足

(すべての交点を通る曲線)

円と円・円と直線・放物線と直線、などが 2 交点をもつとき、この 2 交点を通る曲線のうちで、以下の定理を用いて方程式を知ることが出来るものがある。求まるのは、無数にある曲線の中のほんの一握りであり、多くのことを教えてくれるわけではないが、入試問題では頻出のテーマである。またこれを使うことで計算が簡単になるので覚えておきたい。

(定理) $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ の表す曲線を C_1, C_2 とする。このとき C_1 と C_2 の共有点のすべては $f(x, y) + kg(x, y) = 0$ で表される曲線上にある。

注) この定理の中の k は定数とすることが多いが、x の関数であってもよい。なおこの定理を用いて条件を満たすものすべてが求まるわけでなく、注意が必要である。例えば 2 円 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$ が 2 交点をもつとき、2 交点を通る直線はただ一つしかなく $x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$ において $k = -1$ としたものがその方程式である。しかし、無数にある 2 交点を通る円のうち、k をどのように選んでも円 $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$ は得られない。

[*14] (1) $m = \pm\sqrt{8}$, $n = \pm\sqrt{5}$ (2) 順に「$m < \dfrac{-2-3\sqrt{2}}{3}$, $m > \dfrac{-2+3\sqrt{2}}{3}$」, $2 \times \sqrt{\dfrac{9m^2+12m-14}{5m^2+2m+1}}$

問題 5.5.2 *15

(1) 上記「定理」を証明せよ。

(2) 2 円 $x^2+y^2-2x-2y-2=0$, $x^2+y^2-10x+16=0$ について

(i) 2 円が 2 交点をもつことを示せ。

(ii) 2 交点を通る直線の方程式を求めよ。

(iii) 2 交点と原点を通る円の方程式を求めよ。

(3) 円 $(x+1)^2+(y-3)^2=5$ と直線 $y=mx+2$ の 2 交点と点 $(1\,,\,1)$ を通る円の方程式を求めよ。ただし $m \fallingdotseq -1$ とする。

問題 5.5.3 *16

2 つの放物線 $y=x^2$, $y=-2x^2+(a+1)x+3$ の 2 交点を通る直線の方程式を求めよ。

問題 5.5.4 *17

円 $C: x^2+y^2=r^2$ とその外部にある点 $\mathrm{P}(a\,,\,b)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から円 C に接線を引いたときの接点を Q , R とする。P を中心とする円で、2 点 Q , R を通るものの方程式を求めよ。

(2) 線分 OP を直径とする円の方程式を求めよ。

(3) 直線 QR の方程式を求めよ。

---

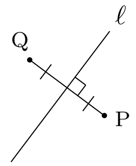
*15 (1) 略 (2) (i) 略 (ii) $4x-y-9=0$ (iii) $x^2+y^2-\dfrac{26}{9}x=0$ (3) $x^2+y^2-\dfrac{m-2}{m+1}x-\dfrac{6m+3}{m+1}y+\dfrac{5m-1}{m+1}=0$

*16 $(a+1)x-3y+3=0$

*17 (1) $x^2+y^2-2ax-2by+r^2=0$ (2) $x^2+y^2-ax-by=0$ (3) $ax+by=r^2$

5.6　線対称移動

直線 ℓ に関して 2 点 P, Q が線対称であるとは、以下の 2 つが成り立つことである。



①　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \ell$

②　ℓ から P, Q までの距離が等しく、2 点が ℓ 上にないときは 2 点は ℓ に関して同じ側にない。

①については (i) 2 直線の傾きの積 $= -1$ (ii) 内積 $= 0$ などの方法で処理すればよく、難しくない。それに対して②であるが、素直に距離を計算すると複雑な式になってしまうことが多い(加えて P, Q が ℓ に関して同じ側にないことも考えないといけない)ので、②の処理には次の②$'$を用いることを覚えておきたい。

②$'$ 線分 PQ の中点 R が ℓ 上にある。

問題 5.6.1 *18

(1) 次のそれぞれの直線に関して点 $(2, 1)$ と線対称な点の座標を求めよ。

(i) $y = x$　(ii) $y = x + 1$　(iii) $3x + 4y = 5$　(iv) $ax + by = 1$

(2) 円 $x^2 + y^2 = 4$ を直線 $y = 3x - 2$ に関して線対称移動した曲線の方程式を求めよ。

問題 5.6.2 *19

(1) $\mathrm{A}(3, 4)$, $\mathrm{B}\left(1, \dfrac{6}{5}\right)$ とする。直線 $y = 2x + 1$ 上の動点 P について $\mathrm{AP} + \mathrm{BP}$ の最小値を求めよ。

(2) $\mathrm{Q}(1, 2)$ とする。2 点 B, C がそれぞれ x, y 軸の正の部分を動くとき $\mathrm{QB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CQ}$ の最小値を求めよ。

---

*18 (1) (i) $(1, 2)$ (ii) $(0, 3)$ (iii) $\left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$ (iv) $\left(\dfrac{-2a^2 - 2ab + 2b^2 + 2a}{a^2 + b^2}, \dfrac{a^2 - 4ab - b^2 + 2b}{a^2 + b^2}\right)$

(2) $\left(x - \dfrac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \dfrac{2}{5}\right)^2 = 4$

*19 (1) $\dfrac{2}{5}\sqrt{101}$　(2) $2\sqrt{5}$

5.7 平行移動など図形の変換

(*Definition*)

f は点を点にうつす写像であるとする。図形 A について「A のすべての点を f によってうつして得られる点の集合 B」を図形 A の f による像といい $f(A)$ で表す。また A を f における B の原像(逆像)という。A から B を求めることを、図形 A の写像 f による変換という。 □ ◿

注１）高校数学では実数に実数を対応させるものを関数というが、一般には関数と写像は区別されない。関数の場合と同様、写像であることの条件として、行き先がただ一つに決まることは重要である。また写像 f を図形 A で考えたときの A と B は、関数でいう定義域・値域である。

注２）上でいう図形とは点の集合のことである。したがって、一点・曲線・領域などがこれに当たる。なお逆に放物線の平行移動などという場合、放物線上の一点一点に戻って考えることが重要である。

注２) でも触れたが、図形の変換においては点と点の対応に戻って考えるのが基本である。特に点の原像の所在がポイントになる。

(例題) 写像 $f:(x\,,\,y)\to(u\,,\,v)=(x+y\,,\,xy)$ における平面全体の像を D とおく。

(1) $(1\,,\,0)$ は D に含まれる点か含まれない点か。

(2) $(0\,,\,2)$ は D に含まれる点か含まれない点か。

解答) $(0\,,\,1)$ が f によって $(1\,,\,0)$ にうつるので $(1\,,\,0)$ は D に含まれる点である。

一方 $(x+y\,,\,xy)=(0\,,\,2)$ を満たす実数 $x\,,\,y$ は存在せず、どのような xy 平面上の点も $(0\,,\,2)$ にはうつらない。よって点 $(0\,,\,2)$ は D に含まれない。 □

この解答でも用いているのだが、図形の変換を考える上で以下の同値関係は重要である。すなわち A の f による像を B として

「$(X\,,\,Y)\in B\iff$ f によって $(X\,,\,Y)$ にうつされる A の点がある

($\iff$ $(X\,,\,Y)$ の f による原像が A に含まれる) 」

以下の公式はこれを用いて証明される。

(曲線の平行移動)

$f(x\,,\,y)=0$ で表される曲線 C を $(+a\,,\,+b)$ 平行移動して得られる曲線を C' とする。このとき $g(x\,,\,y)=f(x-a\,,\,y-b)$ として $g(x\,,\,y)=0$ は曲線 C' の方程式である。

注) この定理は領域の平行移動でも同様である($f=0\,,\,g=0$ が不等式になるだけ)。

問題 5.7.1 [*20]

(1) 写像 $f:(x\,,\,y)\to(u\,,\,v)=(x+3\,,\,y-2)$ について点 $(X\,,\,Y)$ の f による原像を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2$ の f による像を C とする。(1) で求めた原像が $y=x^2$ 上にある条件を用いて、曲線 C の方程式を求めよ。

(3) 上記(曲線の平行移動)の公式を証明せよ。

[*20] (1) $(X-3\,,\,Y+2)$ (2) $y+2=(x-3)^2$ など。
(3) C' 上の $(x\,,\,y)$ の原像 $(x-a,y-b)$ が C 上にあることから。

問題 5.7.2 [*21]

(1) 不等式 $3|x|+5|y| \leqq 15$ の表す領域を図示せよ。

(2) 不等式 $|3x+8|+|5y-10| \leqq 15$ の表す領域を図示せよ。

問題 5.7.3 [*22]

(1) 以下の移動を表す写像 $f:(x\,,\,y) \to (u\,,\,v)$ をそれぞれいえ。

　(i) 原点対称移動　(ii) y 軸対称移動　(iii) 直線 $y=x$ に関する線対称移動

(2) $3\cdot 2^x+y-4=0$ で定まるグラフを以下のように対称移動した曲線の方程式をそれぞれについて求めよ。またグラフを描け。

　(i) 原点対称移動　(ii) y 軸対称移動　(iii) 直線 $y=x$ に関する線対称移動

問題 5.7.4 [*23]

写像 $f:(x\,,\,y) \to (u\,,\,v)=(x+y\,,\,xy)$ における平面全体の像を D とおく。

(1) $x+y=u\,,\,xy=v$ を満たす $x\,,\,y$ を 2 つの解とする t の 2 次方程式を求めよ。

(2) 点 $(u\,,\,v)$ の f による原像を求めよ。

(3) D を求めよ。

(4) 円 $x^2+y^2=1$ の f による像を求めよ。

補足

（1次変換）

数 C の内容になるが写像 $f:(x\,,\,y) \to (u\,,\,v)=(ax+by\,,\,cx+dy)$ についてもここで触れておく。この対応はまた行列を用いて $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表される。特に逆行列が存在する(すなわち $ad-bc \fallingdotseq 0$ である)ときは $(x\,,\,y)$ と $(u\,,\,v)$ の対応が 1 対 1 になり、原像が考えやすい。

（xy 平面上での原点中心の回転）

$(x\,,\,y)=(r\cos\alpha\,,\,r\sin\alpha)\,(r>0)$ として、これを原点中心に θ 回転した点は $(u\,,\,v)=(r\cos(\alpha+\theta)\,,\,r\sin(\alpha+\theta))$ である。この関係は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を回転行列というのはこのためである。

[*21] (1) 4 点 $(\pm 5\,,\,0)$, $(0\,,\,\pm 3)$ をつないだ菱形の周および内部。(図は略)　(2) (1)の領域を $\left(-\dfrac{8}{3}\,,+2\right)$ 平行移動する。(図は略)

[*22] (1) (i) $(u\,,\,v)=(-x\,,\,-y)$ (ii) $(u\,,\,v)=(-x\,,\,y)$ (iii) $(u\,,\,v)=(y\,,\,x)$　(2) (i) $3\cdot 2^{-x}-y-4=0$ (ii) $3\cdot 2^{-x}+y-4=0$ (iii) $3\cdot 2^y+x-4=0$ または $y=\log_2(4-x)-\log_2 3$ (グラフは略)

[*23] (1) $t^2-ut+v=0$

(2) $u^2-4v \geqq 0$ のとき $\left(\dfrac{u\pm\sqrt{u^2-4v}}{2}\,,\,\dfrac{u\mp\sqrt{u^2-4v}}{2}\right)$ (複号同順) , $u^2-4v<0$ のとき存在しない。

(3) $u^2-4v \geqq 0$ で表される部分。　(4) 放物線の一部 $v=\dfrac{1}{2}u^2-\dfrac{1}{2}(-\sqrt{2} \leqq u \leqq \sqrt{2})$

問題 5.7.5 [*24]

　1 次変換 $f:(x\,,\,y)\to(u\,,\,v)=(x+2y\,,\,3x+7y)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 図形 C の f による像は円 $u^2+v^2=1$ である。C を表す $x,\,y$ の関係式を求めよ。

(2) f による点 $(u,\,v)$ の原像を求めよ。

(3) 双曲線 $xy=1$ の f による像を表す $u\,,\,v$ の関係式を求めよ。

問題 5.7.6 [*25]

　xy 平面上で点 $(2\,,\,4)$ を原点中心に θ 回転した点の座標を次のそれぞれについて求めよ。

(1) $\theta=90^\circ$　(2) $\theta=60^\circ$　(3) $\theta=-135^\circ$

(4) 直線 $y=3x+1$ と x 軸のなす鋭角を α として $\theta=2\alpha$

問題 5.7.7 [*26]

　xy 平面上で $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2=2\sqrt{3}x+2y$ で表される曲線 C は放物線である。この曲線について以下の問いに答えよ。

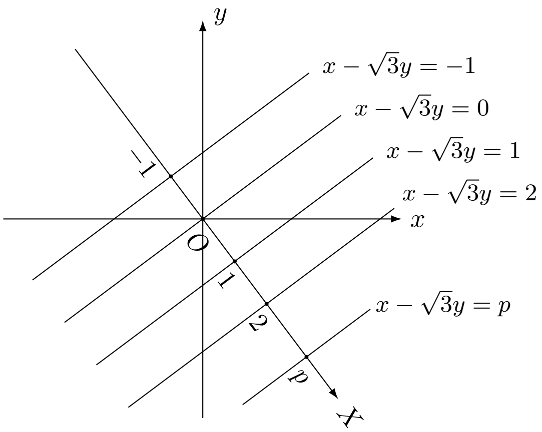
(1) C を原点中心に θ だけ回転した曲線の方程式は $ax^2+bxy+cy^2=dx+ey$ という形になる。特に $b=0$ となるような鋭角 θ を求めよ。

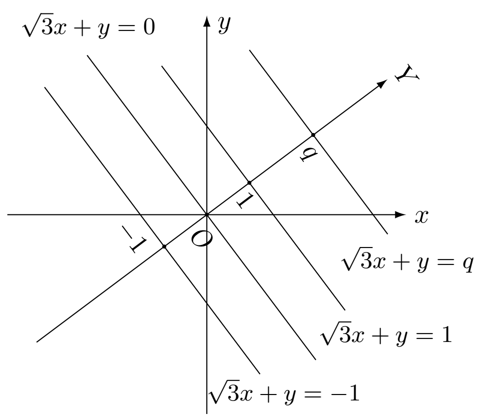
(2) (1) で求めた角度 θ だけ C を回転させた曲線の方程式を求めよ。

(3) 曲線 C を描け。

注 1）C の方程式は $(x-\sqrt{3}y)^2=2(\sqrt{3}x+y)\ \cdots(*)$ であり $b=0$ ならば $a\,,\,c$ の一方は 0 になる。

注 2）直線 $x-\sqrt{3}y=p$ 上にある点の X 座標が p であるように、また直線 $\sqrt{3}x+y=q$ 上にある点の Y 座標が q となるようにそれぞれ X 軸・Y 軸を設定する。例えば xy 座標が $(1\,,-\sqrt{3})$ である点は 2 直線 $x-\sqrt{3}y=4\,,\ \sqrt{3}x+y=0$ の上にあるので XY 座標は $(4\,,\,0)$ である。この XY 平面で曲線 C の方程式は $(*)$ より $X^2=2Y$ であるが、これから C の中心軸は Y 軸であり、xy 平面での直線 $x-\sqrt{3}y=0$ に重なっていることがわかる。このようにして、中心軸が y 軸と平行になる回転角は 60° であることを求めてもよい。





[*24] (1) $10x^2+46xy+53y^2=1$　(2) $(7u-2v\,,-3u+v)$　(3) $(7u-2v)(-3u+v)=1$

[*25] (1) $(-4\,,\,2)$　(2) $(1-2\sqrt{3}\,,\ \sqrt{3}+2)$　(3) $(\sqrt{2}\,,-3\sqrt{2})$　(4) $(-4\,,-2)$

[*26] (1) 60°　(2) $y=x^2$　(3) 略

5.8　曲線の通過領域

曲線の通過領域の問題は差のつきやすい内容である。直感的に片付けられない場合が多く、厳密な解答のまとめ方を覚えておく必要がある。

（例題）直線 $y = 2mx - m^2 \cdots (*)$ において定数 m がいろいろな値のとき得られる直線の集合を xy 平面で考える。例えば十通りの値を考えれば十本の直線の集合になる。いま、すべての実数値 m に対して得られる直線の集合を通過領域 D ということとして以下の問いに答えよ。

(1) 点 $(2, 0)$ は D に含まれるか含まれないか。

(2) 点 $(0, 4)$ は D に含まれるか含まれないか。

解答）$(x, y) = (2, 0)$ を $(*)$ に代入すると $0 = 4m - m^2$ である。すなわち $m = 0, 4$ のときの直線が $(2, 0)$ を通っており、点 $(2, 0)$ は D に含まれる。一方で $(x, y) = (0, 4)$ を $(*)$ に代入すると $4 = -m^2$ であるが、これを満たす実数 m は存在しない。すなわちどの m に対しての直線も $(0, 4)$ を通らないので、点 $(0, 4)$ は D に含まれない。 $\square$

例えば黒板がチョークで真っ白になっていたとする。黒板拭きで拭けば綺麗になってゆくが、この綺麗になったところが黒板拭きの通過した領域である。ここで重要なのは通過した回数ではない。黒板拭きが一回でも通過したところは綺麗になり、そうでないところは白いまま残るのであって「一度でも通ったか、一回も通らなかったか」が分かれ目である。これが理解できれば、次の同値な言い換えも問題はないだろう。すなわち条件 P を満たす m の値に応じて変化する曲線の通過領域を D として

「点 (X, Y) が D に含まれる

$\iff$ 条件 P を満たすある m が存在してその m においての曲線が点 (X, Y) を通る」

補）例題の直線の通過領域は以下のようにして求まる。

点 $(X, Y) \in D$

$\iff$ ある実数 m についての直線が点 (X, Y) を通る

$\iff$ $Y = 2mX - m^2$ を満たす実数 m が存在する

$\iff$ m の方程式 $m^2 - 2Xm + Y = 0$ が実数解をもつ

$\iff$ $X^2 - Y \geqq 0$

問題 5.8.1 *27

以下の各条件の下での曲線の通過領域を図示せよ。

(1) 曲線 $mx^2 - 3x - 1 - my = 0$　　条件 (i) m は全実数範囲で動く (ii) $0 < m < 1$

(2) 曲線 $x \sin\theta + (2\cos\theta - \sqrt{3})y + 1 = 0$　　条件　θ は全実数範囲で動く

(3) 曲線 $2(m-1)x - y = m^2 - 2m$　　条件 (i) m は全実数範囲で動く (ii) $m \geqq 0$ (iii) $0 \leqq m \leqq 4$

---

*27 （図はすべて略）(1)（i）$y = x^2$ かつ $x \fallingdotseq -\dfrac{1}{3}$ を除いた部分 (ii) 略

(2) 円 $x^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 4$ の周および外部　(3)（i）$y \leqq x^2 + 1$ で表される領域 (ii) (iii) 略

5.9　軌跡

軌跡の問題はさまざまなパターンがあり、またいろいろな種類の知識が必要になるので、習熟に時間が掛かるテーマであるといってよいだろう。ここでは大きく3つに分けてまとめておく。

① 点 (X, Y) についての条件から同値変形で $f(X, Y)=0$ をつくる。

② 変数 t に対しての点 $\mathrm{P}(x(t), y(t))$ の軌跡の求め方は以下のような方法がある。

（方法1）t を消去して点 P がどのような曲線上で動くかを求め(第一段階)、さらに実際に動く部分を考える(第二段階)。

（方法2）t を消去せずに、そのまま P の軌跡を求める。「軌跡を求めよ、という問いの答は名前のある曲線になる」ことが多く、直線・円・楕円などのベクトル方程式がそのまま与えられている場合は t を消去する必要はない。例えば $(\cos t, \sin t)$ の軌跡はこのままで円 $x^2+y^2=1$ であることがわかる。

（方法3）数Ⅲの内容になるが、点 P の速度ベクトル $\overrightarrow{v}=(x'(t), y'(t))$ を利用して曲線を描く。

③ 図形的な性質を利用して軌跡を求める。

上記以外では、ベクトルで与えられた式を「変化しないもの」と「変化するもの(特に円運動など作図しやすい形)」に分けて軌跡を求める、などの方法は覚えておきたい。(→問題5.9.7 参照)

注）② の方法3など、数Ⅲ・C の内容であるものは補足で扱う。

問題 5.9.1 [*28]

(1) xy 平面上で、点 $(0, 2)$ と x 軸までの距離が等しい点の軌跡を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(X, Y)$ から 2 円 $C_1: x^2+y^2-2x-3=0$, $C_2: x^2+y^2-12x-2y+35=0$ のそれぞれに接線が引けて、点 P から各接点までの距離は等しいという。

(i) P と C_1, C_2 上の接点との距離をそれぞれ X, Y で表せ。

(ii) 条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(注) (i)の答えの根号の中が同時に負であることはない。また軌跡の方程式は 2 円の式の差であることを確認せよ。

問題 5.9.2 [*29]

以下の条件で定まる点 $\mathrm{P}(X, Y)$ の軌跡をそれぞれ求めよ。

(1) $(X, Y)=(\cos t, 2\cos t)$ (t は任意の実数)

(2) $(X, Y)=(4t^2+t, 2t-1)$ $(1<t<4)$

(3) $(X, Y)=(3t+1, -2t+4)$ (t は任意の実数)

[*28] (1) 放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ (2) (i) 順に $\sqrt{(X-1)^2+Y^2-4}$, $\sqrt{(X-6)^2+(Y-1)^2-2}$
(ii) 直線 $10x+2y-38=0$

[*29] (1) 線分 $y=2x\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ (2) 放物線の一部 $x=y^2+\dfrac{5}{2}y+\dfrac{3}{2}(1<y<7)$
(3) 点 $(1, 4)$ を通って $(3, -2)$ を方向ベクトルとする直線

問題 5.9.3 *30

点 P は円 $x^2+y^2=1$ 上の動点とする。また点 $\mathrm{A}(-9,-3)$, $\mathrm{B}(0,-3)$ であり △PAB の重心を $\mathrm{G}(X,Y)$ とする。G の軌跡を以下の２通りの方法で求めよ。

(1) 点 P の座標を X, Y で表す。(写像 $f:\mathrm{P}\to\mathrm{G}$ について G の原像を X, Y で表す)

(2) 三角関数を利用する。

問題 5.9.4 *31

点 $\mathrm{P}(X,Y)=\left(\dfrac{4}{1+t^2}\,,\ \dfrac{3+4t+3t^2}{1+t^2}\right)$ とする。t を変化させたときの点 P の軌跡を問題 5.3.4 の方法にならって求めよ。。

問題 5.9.5 *32

(1) xy 平面上に点 $\mathrm{A}(-1,0)$, $\mathrm{B}(1,0)$ がある。$\angle\mathrm{APB}=30^\circ$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし P の y 座標は正とする。

(2) 問題 5.3.6 (2) において a が実数全体で変化したときの交点の軌跡を求めよ。

問題 5.9.6 *33

(1) 問題 1.15.1(3) において m を変化させたときの線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

(2) 2 つの放物線 $y=x^2$, $y=-x^2+mx-m$ が異なる 2 交点をもつとき、この 2 点を両端とする線分の中点の軌跡を求めよ。

(3) 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x+n$ が異なる 2 交点 A, B をもつとき、線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

(4) 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=m(x+2)$ が異なる 2 交点 A, B をもつとき、線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

問題 5.9.7 *34 (やや難)

$\mathrm{AB}=8$, $\mathrm{BC}=10$, $\mathrm{CA}=6$ である △ABC がある。点 P は △ABC の辺上を、点 Q は点 B を中心とする半径 1 の円上を、それぞれ独立に動くものとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定まる点 R の軌跡を作図せよ。

(2) $\tan\dfrac{C}{2}$ の値を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ で定まる点 S の存在範囲の面積を求めよ。

(Hint : まず P を固定して Q を動かす。また $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は分解する。)

*30 $(-3,-2)$ を中心として半径が $\dfrac{1}{3}$ の円

*31 中心が $(2,3)$ で半径が 2 の円から 1 点 $(0,3)$ を除いた部分。($-90^\circ<\theta<90^\circ$ として $-180^\circ<2\theta<180^\circ$)

*32 (1) 円弧 $x^2+(y-\sqrt{3})^2=4$ かつ $y>0$ (2) 2 点 $(-1,2)$, $(4,0)$ を直径の両端とする円から点 $(-1,2)$ を除いた部分。

*33 (1) 放物線 $y=4x^2-x+1$ (2) 放物線の一部 $y=2x^2-2x$ $(x<0\,,\,x>2)$
(3) 線分 $y=-2x$ $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (4) 円弧 $(x+1)^2+y^2=1$ $\left(x>-\dfrac{1}{2}\right)$

*34 (1) 図は略 ($\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ として三角形 BB′C′) (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) $42+\pi$