高校数学 Web 問題集

−basic 4−

(利用上の注意点)

また間違い等(おそらくたくさんあります)を発見された場合にも御連絡いただけると助かります。

4　数列

4.1　数列の一般項

数列において、何番目にどんな項があるかはただ一通りに決まるので、この対応は関数である。この関数を数列の一般項という。関数は通常 $f(x)$ などと表される。一般項は n を変数として数列の n 番目の項を表すものであり、例えば数列$\{a_n\}$では関数 $a(n)$であるが、$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ における n 番目の項と同じ a_nという表記が用いられる。なお n が定数のときは意味が全く変わってしまうので、注意が必要である。

① 初項が a_1 で、公差 d の等差数列$\{a_n\}$ $(n \geqq 1)$ の一般項は

$a_n = a_1 + (n-1)d$

② 初項が a_1 で、公比 r の等比数列$\{a_n\}$ $(n \geqq 1)$ の一般項は

$a_n = a_1 r^{n-1}$

問題 4.1.1 [*1]

以下の数列の一般項を、初項を a_1 としたとき、初項を a_0 としたときのそれぞれの場合について求めよ。

(1)　$2 \cdot 3^2\,,\ 3 \cdot 4^2\,,\ 4 \cdot 5^2\,,\ 5 \cdot 6^2\,,\ \cdots\cdots$

(2)　$2\,,\ -6\,,\ 18\,,\ -54\,,\ \cdots\cdots$

(3)　$\dfrac{1}{1\cdot4\cdot7}\,,\ \dfrac{1}{4\cdot7\cdot10}\,,\ \dfrac{1}{7\cdot10\cdot13}\,,\ \dfrac{1}{10\cdot13\cdot16}\,,\ \cdots\cdots$

(4)　$1\cdot(2n-1)\,,\ 2\cdot(2n-3)\,,\ 3\cdot(2n-5)\,,\ \cdots\cdots\cdots\,,\ (n-1)\cdot3\,,\ n\cdot1$

問題 4.1.2 [*2]

(1) $a_3 = 15\,, a_{10} = -6$ である等差数列 $\{a_n\}$ $(n \geqq 1)$ の一般項を求めよ。また a_{100} を求めよ。

(2) $b_2 = 4\,, b_4 = 8$ である等比数列 $\{b_n\}$ $(n \geqq 1)$ の一般項を求めよ。また b_{20} を求めよ。

[*1] (1) $a_1 \to a_n = (n+1)(n+2)^2$　$a_0 \to a_n = (n+2)(n+3)^2$　(2) $a_1 \to a_n = 2(-3)^{n-1}$　$a_0 \to a_n = 2(-3)^n$

(3) $a_1 \to a_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$　$a_0 \to a_n = \dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)}$

(4) $a_1 \to a_k = k(2n-2k+1)$　$a_0 \to a_k = (k+1)(2n-2k-1)$

[*2] (1) $a_n = -3n+24\,, -276$　(2) $b_n = 2(\sqrt{2})^n$ または $b_n = 2(-\sqrt{2})^n\,, 2048$

4.2 等差数列・等比数列の和

いずれも、公式でなく計算方法を覚えるのが重要である。

① 等差数列の和

n 個の数 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ が公差 d の等差数列をなすとき、これを逆に並べた $a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots, a_2, a_1$ は公差 $-d$ の等差数列である。この性質を用いて和 S は以下のように求まる。すなわち $a_1+a_n=f$ として

$$\begin{array}{rrl} & S = & a_1 + a_2 \quad + a_3 \quad + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n \\ +) & S = & a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots\cdots + a_2 \quad + a_1 \\ \hline & 2S = & f \;+\; f \quad +\; f \quad + \cdots\cdots +\; f \quad + f \qquad (=fn) \end{array}$$

$S=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$ は公式であるが、上の計算から得られる結果である。

② 等比数列の和

展開式 $(a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^l)(1-r)=a-ar^{l+1}$ を利用するだけである。すなわち $r \fallingdotseq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^l &= \frac{(a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^l)(1-r)}{1-r} \\ &= \frac{a-ar^{l+1}}{1-r} \end{aligned}$$

問題 4.2.1 [*3]

(1) $a_1=-37$ で公差が 3 の等差数列 $\{a_n\}$ において、和 $a_{10}+a_{11}+a_{12}+\cdots\cdots+a_{35}$ を求めよ。

(2) 公差が正の等差数列 $\{a_n\}$ において、最初の 3 項の和は 6 で、2 乗の和は $\dfrac{25}{2}$ であるという。$\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ。また最初の n 項の和の 3 倍が最初の $2n$ 項の和に等しくなるような n の値を求めよ。

(3) 等差数列において、初項 10 から第 n 番目の項 -15 までの和は -40 であるという。n を求めよ。また 40 番目の項までの和を求めよ。

(4) $a_3=3$, $a_6=-\dfrac{1}{9}$ である等比数列 $\{a_n\}$ について公比 r を求めよ。また、初項から第 l 項までの和 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_l$ と、逆数の和 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_l}$ をそれぞれ求めよ。

(5) 正の整数 a, n, r について

$$\begin{cases} a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1} = 1210 \\ a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{2n-1} = 1210\times 244 \end{cases}$$

が成り立つとき、整数の組 (a, n, r) を求めよ。

(6) 初項が 2 で末項が 128 の等比数列の総和が有理数であるとき、公比 r も有理数であることを示せ。

[*3] (1) 715 (2) 順に $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, 5 (3) 順に 16, -900 (4) 順に $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{81}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^l\right\}$, $\dfrac{1}{108}\{1-(-3)^l\}$ (5) $(10, 5, 3)$, $(1210, 1, 243)$ (6) 略

問題 4.2.2 [*4]

等差数列 $\{a_n\}(n\geqq 1)$ について、初項から第 n 項までの和を S_n として数列 $\{S_n\}(n\geqq 1)$ を定義する。すなわち　$S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2$, $S_3=a_1+a_2+a_3$, $\cdots\cdots\cdots$　である。

(1) S_3 を a_1 と a_3 で表わせ。　(2) S_4 を a_1 と a_4 で表わせ。

(3) S_5 を a_1 と a_5 で表わせ。　(4) 一般項 S_n を求めよ。

(5) $\{a_n\}$ の一般項が $a_n=-2n+50$ であるとき、一般項 S_n を n で表わせ。

4.3　Σ の定義と公式

(*Definition*)

$f(k)$ の k に整数 l から l 以上の整数 n までを順に代入し得られる値の総和を $\sum\limits_{k=l}^{n} f(k)$ で表す。すなわち $n=l+m$ として

$$\sum_{k=l}^{n} f(k)=\sum_{k=l}^{l+m} f(k)=f(l)+f(l+1)+f(l+2)+\cdots\cdots+f(l+m)$$

である。 □ ⊘

Σ の計算において、以下の公式は重要である。

① $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}\{f(k)+g(k)\}=\sum_{k=m}^{n} f(k)+\sum_{k=m}^{n} g(k)$　② $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} af(k)=a\sum_{k=m}^{n} f(k)$

特に ① ② より

③ $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}\{\alpha f(k)+\beta g(k)\}=\alpha\sum_{k=m}^{n} f(k)+\beta\sum_{k=m}^{n} g(k)$

⑦ ⑧ など、多くの Σ 計算の結果は

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{f(k+1)-f(k)\}=f(n+1)-f(1)$

によって得られる。そしてお馴染みの公式。

⑤ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c=\overbrace{c+c+c+\cdots\cdots+c}^{n\text{ 個}}=nc$

⑥ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

⑦ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

⑧ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

(性質 ① ② を「Σ の線形性」という。)

[*4] (1) $\dfrac{(a_1+a_3)3}{2}$　(2) $\dfrac{(a_1+a_4)4}{2}$　(3) $\dfrac{(a_1+a_5)5}{2}$　(4) $\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$　(5) $-n^2+49n$

問題 4.3.1 [*5]

次の和を$\sum$を用いて表わせ。

(1) $3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6+\cdots\cdots+12\cdot13$

(2) $\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{8^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}$

(3) $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots\cdots+(n-1)\cdot2+n\cdot1$

(4) $(x-2y)^n={}_n\mathrm{C}_0x^n+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n(-2y)^n$

問題 4.3.2 [*6]

次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{7}6$ (2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}k^4$ (3) $\displaystyle\sum_{l=2}^{10}2k$

(4) $\displaystyle\sum_{k=10}^{20}(3k-4)$ (5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}2^{k-3}$ (6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+8k-10)$

問題 4.3.3 [*7]

次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)$ (2) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1}(i^2-i+3)$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k^2)$

(4) $1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots\cdots+(2n-1)^3-(2n)^3$

問題 4.3.4 [*8]

公式④を利用して、以下の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{16k^2-4}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ (5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$ (6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

問題 4.3.5 [*9]

(1) $r\fallingdotseq1$とする。$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}=1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1}$を$S-rS$を計算することで求めよ。

(2) 以下の和を求めよ。

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!$

[*5] (1) 例えば $\displaystyle\sum_{k=3}^{12}k(k+1)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(i+2)(i+3)$ など。 (2) 例えば $\displaystyle\sum_{k=6}^{n}\frac{1}{k^2}$ (3) 例えば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$
(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^k(-2y)^{n-k}$ あるいは $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^{n-k}(-2y)^k$

[*6] (1) 30 (2) 354 (3) $18k$ (4) 451 (5) $\dfrac{1023}{4}$ (6) $\dfrac{2n}{2n+1}$ (7) $n(n^3+4n^2+8n-5)$

[*7] (1) $(n-1)n(n+1)/3$ (2) $(n+2)(n^2+n+9)/3$ (3) $n(n+1)^2(2-n)/4$ (4) $-n^2(4n+3)$

[*8] (1) 9 (2) $1-\dfrac{1}{n+1}$ (3) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4n+2}\right)$ (4) $\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$ (5) $\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
(6) $n(n+1)(n+2)(n+3)/4$

[*9] (1) $\dfrac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}$ (2) (i) $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$ (ii) $1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ (iii) $(n+1)!-1$

4.4　階差数列

数列 $\{a_n\}$ に対して、隣接項の差 $(a_{k+1}-a_k)$ を順に並べてできる数列を $\{a_n\}$ の階差数列という。例えば $\{a_n\}(n\geqq 1)$ の階差数列を $\{b_n\}(n\geqq 1)$ とすると

$$a_2-a_1=b_1\ ,\quad a_3-a_2=b_2\ ,\quad a_4-a_3=b_3\ ,\ \cdots\cdots$$

である。これから逆に右のような関係になるので

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \cdots\cdots & & a_{n-1} & & a_n \\ & +b_1 & & +b_2 & & +b_3 & & +b_4 & \cdots & +b_{n-2} & & +b_{n-1} & \end{array}$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1})=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

である。

問題 4.4.1 *10

以下のそれぞれについて、数列 $\{a_n\}(n\geqq 1)$ の階差数列を $\{b_n\}(n\geqq 1)$ として一般項 b_n を求めよ。

(1) 一般項が $a_n=n^2+2n$ のとき。

(2) 一般項が $a_n=(n-2)4^{n+1}$ のとき。

問題 4.4.2 *11

数列 $\{a_n\}(n\geqq 1)$ の階差数列を $\{b_n\}(n\geqq 1)$ とする。

(1) $a_1=3$, 一般項 $b_n=2^n$ のとき、一般項 a_n を求めよ。

(2) $a_1=1$ で、すべての正整数 n について $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n^2+n}$ であるとき、一般項 b_n , a_n をそれぞれ求めよ。

(3) $a_1=-1$, $a_2=1$ で、数列 $\{b_n\}(n\geqq 1)$ の階差数列 $\{c_n\}(n\geqq 1)$ ($\{a_n\}$ の第 2 階差数列) の一般項が $c_n=6n^2-2n$ であるとき、一般項 a_n を求めよ。

問題 4.4.3 *12

平面に n 本の直線を、どの 2 本も平行でなく、どの 3 本も同一点を通らないように引くとき、平面はこれらの直線によっていくつの部分に分けられるか。

---

*10 (1) $b_n=2n+3$　(2) $b_n=(3n-2)4^{n+1}$

*11 (1) $a_n=2^n+1$　(2) $b_n=\dfrac{1}{n^2+n}$, $a_n=2-\dfrac{1}{n}$　(3) $a_n=-1+\dfrac{1}{6}(n-1)(3n^3-11n^2+10n+12)$

*12 $1+\dfrac{1}{2}n(n+1)$

4.5 第 n 項までの和 S_n と $\{a_n\}$

数列 $\{a_n\}(n \geqq 1)$ の初項から第 n 項までの和を S_n として定義された数列 $\{S_n\}(n \geqq 1)$ を考える。

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &+a_2 \\ &+a_3 \\ &+a_4 \end{aligned}$$

であるので

$$a_1 = S_1\,,\ a_2 = S_2 - S_1\,,\ a_3 = S_3 - S_2\,,\ a_4 = S_4 - S_3\,,\ \cdots\cdots$$

となる。$\{S_n\}$ を用いてこれを一般的に表わすと

「 $a_1 = S_1$, $n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$ 」

という形になる。なお $a_2\,, a_3\,, a_4\,, \cdots$ は数列 $\{S_n\}$ の階差数列に他ならない。

また数列 $\{a_n\}$ の各項が 0 でないとき、第 n 項までの積を T_n として数列 $\{T_n\}(n \geqq 1)$ を定めると、本質的には上と同様にして

「 $a_1 = T_1$, $n \geqq 2$ のとき $a_n = \dfrac{T_n}{T_{n-1}}$ 」

という関係になることがわかる。

問題 4.5.1 [*13]

数列 $\{a_n\}(n \geqq 1)$ の初項から第 n 項までの和を S_n として定義された数列 $\{S_n\}(n \geqq 1)$ の一般項が以下のとき、一般項 a_n をそれぞれについて求めよ。

(1) $S_n = n^2 + 5n$

(2) $S_n = n^2 + 5n + 3$

問題 4.5.2 [*14]

(1) $T_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ によって定まる数列 $\{T_n\}$ の一般項は $T_n = (-3)^{2n+4}$ である。このとき一般項 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}(n \geqq 1)$ の初項から第 n 項までの逆数の和を S_n として数列 $\{S_n\}$ を定めると、任意の正整数 n について $S_n = \dfrac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$ である。一般項 a_n と $\sum\limits_{k=1}^{n} a_n$ を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}(n \geqq 1)$ の初項から第 n 項までの和を S_n として数列 $\{S_n\}$ を定めると、任意の正整数 n について $S_{n+1} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k = 1 + a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots\cdots + n a_n$ が成り立つ。$a_1 = 1$ のとき一般項 a_n を求めよ。

---

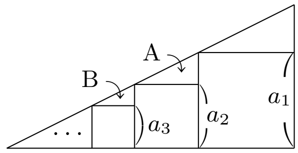
*13 (1) $a_n = 2n + 4$ (2) $a_1 = 9$, $n \geqq 2$ のとき $a_n = 2n + 4$

*14 (1) $a_1 = 729$, $n \geqq 2$ のとき $a_n = 9$ (2) 順に $\dfrac{n(n+2)}{2}$, $\dfrac{1}{12}n(n+1)(2n+7)$ (3) $a_n = (n-1)!$

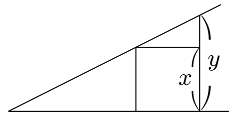
4.6　数列の帰納的定義と漸化式

数列の各項を、ある一定の規則に従って、初期条件から順に定めてゆくことを「数列の帰納的定義」という。また“一定の規則”を数式にしたものが「漸化式」である。

例えば右図のような正方形の列を考え、n 番目に大きな正方形の一辺の長さを a_n として数列 $\{a_n\}\,(n \geqq 1)$ を定める。さらに直角三角形の底辺と高さの比は $5:3$ で、初項 $a_1 = 2$ とする。



直角三角形 A を考えて $\dfrac{a_1 - a_2}{a_2} = \dfrac{3}{5}$ であるので $a_2 = \dfrac{5}{8}a_1$ となる。同様に、三角形 B を考えて $\dfrac{a_2 - a_3}{a_3} = \dfrac{3}{5}$ であり $a_3 = \dfrac{5}{8}a_2$ となるが、



以下この繰り返しで $a_1, a_2, a_3, \cdots$ が定まってゆくことは容易に理解できるであろう。一般に相似な場合は大きさによらず、図の x, y の間に $\dfrac{y-x}{x} = \dfrac{3}{5}$ が成り立ち、$y = \dfrac{5}{8}x$ である。この x, y に a_1, a_2 を代入すれば $a_2 = \dfrac{5}{8}a_1$ となり a_2, a_3 を代入すれば $a_3 = \dfrac{5}{8}a_2$ が得られるが、この操作はすべての隣接項間について可能であり、各関係式を教えてくれる。結局この数列は $a_1 = 2$ から $\dfrac{5}{8}$ 倍という規則で項の並びが定まっていることがわかるが、この規則を表すのが漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{5}{8}a_n$ である。これはまた無数にある各関係式

$(y = \dfrac{5}{8}x)$

x	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n	$\cdots$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	
y	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{n+1}	$\cdots$

$$a_2 = \frac{5}{8}a_1\ ,\ a_3 = \frac{5}{8}a_2\ ,\ a_4 = \frac{5}{8}a_3\ ,\ \cdots\cdots$$

を一つにまとめたものでもあり、逆に一つ一つの関係式をいえることは重要である。

問題 4.6.1 *15

以下の漸化式で定まる数列の第 5 項目までを答えよ。

(1) $a_1 = 1\,,\ a_{n+1} = 2a_n$　　(2) $a_1 = 4\,,\ a_{n+1} = (3a_n$ を 5 で割った余り$)$

(3) $a_1 = 1\,,\ a_2 = 1\,,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

(4) $a_1 = 2\,,\ a_{2n+1} = 2a_{2n} - 7\,,\ a_{2n} = a_{2n-1} + 3$

問題 4.6.2 *16

以下の漸化式で帰納的に定まる数列 $\{a_n\}\,(n \geqq 1)$ の一般項を求めよ。(→ 4.7 補足(i)参照)

(1) $a_1 = 3\,,\ a_{n+1} = -\dfrac{1}{4}a_n$

(2) $a_1 = 5\,,\ a_{n+1} = a_n - 2$

(3) $a_1 = -1\,,\ a_{n+1} = a_n + 6n^2$

(4) $a_1 = 4\,,\ a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_n$

---

*15 (1) $1, 2, 4, 8, 16$　(2) $4, 2, 1, 3, 4$　(3) $1, 1, 2, 3, 5$　(4) $2, 5, 3, 6, 5$

*16 (1) $3\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$　(2) $-2n+7$　(3) $-1 + n(n-1)(2n-1)$　(4) $\dfrac{4}{n}$

4.7　漸化式 $\boldsymbol{a_{n+1} = pa_n + q}$

　このタイプの漸化式は出題率が高い。$p = 1$ の場合は等差数列である。$p \fallingdotseq 1$ のとき、数列 $\{a_n\}\,(n \geqq 1)$ は次の性質をもち、それぞれを利用する二通りの解法がある。

① 性質(i)「階差数列が等比数列になる。」

　$a_{n+1} = pa_n + q$ と $a_{n+2} = pa_{n+1} + q$ との差をとると $a_{n+2} - a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n)$ となるので、階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}\,(n \geqq 1)$ は初項が $a_2 - a_1$ で、公比が p の等比数列である。これから

$$a_{n+1} = pa_n + q = a_n + (a_2 - a_1)p^{n-1}$$

となり、一般項 a_n が求まる。

② 性質(ii)「平行移動すると等比数列になる。」

　$a_{n+1} = pa_n + q$ と $\alpha = p\alpha + q$ との差をとると $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ となる。これは各項から α を引くことによって得られる数列 $\{a_n - \alpha\}\,(n \geqq 1)$ が、初項は $a_1 - \alpha$ で公比が p の等比数列になることを示している。これから

$$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1}$$

となる。なお、どれだけ平行移動すればよいかは $a_{n+1} + \beta = p(a_n + \beta)$ を変形して漸化式と較べ β を求めても知ることができる。

(性質(i)(ii)の例)

$$9\,,\,99\,,\,999\,,\,9999\,,\,\cdots\cdots$$

という数列の漸化式は $a_{n+1} = 10a_n + 9$ である。この数列の階差数列は

$$90\,,\,900\,,\,9000\,,\,90000\,,\,\cdots\cdots$$

という等比数列である。また、最初の数列の各項に 1 を足すと

$$10\,,\,100\,,\,1000\,,\,10000\,,\,\cdots\cdots$$

という等比数列になる。

問題 4.7.1 [*17]

　以下の漸化式で帰納的に定まる数列 $\{a_n\}\,(n \geqq 1)$ の一般項を上記①②の二通りの方法で求めよ。

(1) $a_1 = 2\,,\ a_{n+1} = 3a_n + 4$

(2) $a_1 = 3\,,\ a_{n+1} = -\dfrac{3}{4}a_n + 4$

(3) $a_1 = 5\,,\ a_{n+1} = -2a_n + 15$

(4) $a_1 = -p\,,\ a_{n+1} = pa_n - (p + 2)$

[*17] (1) $-2 + 4 \cdot 3^{n-1}$　(2) $\dfrac{16}{7} + \dfrac{5}{7}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$　(3) 5
(4) $p = 1$ のとき $-3n + 2$, $p \fallingdotseq 1$ のとき $\dfrac{p + 2 - (p^2 + 2)p^{n-1}}{p - 1}$

補足

（漸化式の解法）

(i) 漸化式解法の基本パターンは次の 2 つである。どちらも特別なものではない。

① $a_{n+1} = a_n + f(n)$ $(n \geqq 1)$

$n \geqq 2$ について一般項は

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & \cdots\cdots & & a_{n-1} & & a_n \\ & +f(1) & & +f(2) & & +f(3) & & +f(4) & \cdots & & +f(n-1) & \end{array}$$

$a_n = a_1 + \{f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)\}$

② $a_{n+1} = a_n \times f(n)$ $(n \geqq 1)$

$n \geqq 2$ について一般項は

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & \cdots\cdots & & a_{n-1} & & a_n \\ & \times f(1) & & \times f(2) & & \times f(3) & & \times f(4) & \cdots & & \times f(n-1) & \end{array}$$

$a_n = a_1 \times \{f(1)f(2)\cdots f(n-1)\}$

注）$f(n)$ が定数ならば①の $\{a_n\}$ は公差が $f(n)$ の等差数列で、②の $\{a_n\}$ は公比が $f(n)$ の等比数列である。

(ii) 実は多くの問題で、与えられる漸化式は①, ②の形ではない。このような場合には新しい数列(以下 “補助数列” という)をつくることで①, ②のパターンに帰着させることを考える。典型的なタイプについて、どのような補助数列を用いればよいかは覚えておくべきであろう。

◇ $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ に対しての補助数列の例

(1) $a_1 - \alpha, a_2 - \alpha, a_3 - \alpha, \cdots, a_n - \alpha, \cdots$ （→ 4.7 ②性質(ii)参照）

(2) $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_3}, \cdots, \dfrac{1}{a_n}, \cdots$

(3) $\dfrac{a_1}{p}, \dfrac{a_2}{p^2}, \dfrac{a_3}{p^3}, \cdots, \dfrac{a_n}{p^n}, \cdots$

(4) $1a_1, 2a_2, 3a_3, \cdots, na_n, \cdots$

(5) $\dfrac{a_1}{1}, \dfrac{a_2}{2}, \dfrac{a_3}{3}, \cdots, \dfrac{a_n}{n}, \cdots$

(6) $a_2 - \alpha a_1, a_3 - \alpha a_2, a_4 - \alpha a_3, \cdots, a_{n+1} - \alpha a_n, \cdots$

(7) さらに $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, \cdots$ との連立漸化式であるときは

$a_1 + kb_1, a_2 + kb_2, a_3 + kb_3, \cdots, a_n + kb_n, \cdots$

を用いることが多い。

注）2 つの補助数列を使ったり二段目まで取らないといけない問題もあるが、その場合もだいたいは上記パターンの組合せになる。

問題 4.7.2 [*18]

いずれについても初項 a_1 は 1 とする。

(1) 漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 1}$ $\cdots$① で定まる$\{a_n\}$の一般項を、①の両辺の逆数を考えることで求めよ。

(2) 漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 2^n$ $\cdots$② で定まる$\{a_n\}$の一般項を、②の両辺を 2^{n+1} で割った式を考えることで求めよ。

(3) 漸化式 $na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$ $\cdots$③ で定まる$\{a_n\}$の一般項を、③の両辺を $n(n+1)$ で割った式を考えることで求めよ。

[*18] (1) $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$ (2) $a_n = (3n-2)2^{n-1}$ (3) $a_n = 2n-1$

問題 4.7.3 [*19]

(1) $a_1=a_2=1$ とする。漸化式 $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ が

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)\cdots①,\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)\cdots②$$

と変形されることを用いて $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$, $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 漸化式 $a_{n+2}=-3a_{n+1}+10a_n$ を(1)の①,②の形に変形せよ。また $a_1=-1$, $a_2=2$ として一般項 a_n を求めよ。

問題 4.7.4 [*20]

(1) 2 つの数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$について $a_{n+1}+kb_{n+1}=t(a_n+kb_n)$ $(n\geqq 1)$ が成り立つとき、数列$\{a_n+kb_n\}$の一般項を求めよ。

(2) $a_1=3$, $b_1=2$, $a_{n+1}=4a_n+b_n\cdots①$, $b_{n+1}=a_n+4b_n\cdots②$ で定まる$\{a_n\}$, $\{b_n\}$の一般項を①,②の和と差を考えることで求めよ。

(3) $a_{n+1}=4a_n-9b_n\cdots③$, $b_{n+1}=-2a_n+b_n\cdots④$ について ③ + ④ $\times t$ を計算すると

$$a_{n+1}+tb_{n+1}=\boxed{ア}a_n+\boxed{イ}b_n\cdots⑤$$

となる。$1:t=$ ア : イ となる t の値は 2 つあるが、それらの t に対して⑤は $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$ となる。これから $a_1=9$, $b_1=-2$ であるとき、2 つの数列の一般項が $a_n=\boxed{オ}$, $b_n=\boxed{カ}$ であることを求められる。

問題 4.7.5 [*21]

次の漸化式で定まる$\{a_n\}$の一般項を求めよ。(hint : (1) 補助数列(1)(2) (2) 補助数列(3)(6))

(1) $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{3a_n+1}$ $(n\geqq 1)$ (2) $a_1=1$, $a_2=5$, $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$ $(n\geqq 1)$

[*19] (1) 順に $(1-\alpha)\beta^{n-1}$, $(1-\beta)\alpha^{n-1}$
(2) $a_{n+2}-2a_{n+1}=-5(a_{n+1}-2a_n)$, $a_{n+2}+5a_{n+1}=2(a_{n+1}+5a_n)$ ($\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-10$ より)
一般項は $a_n=\dfrac{1}{7}\{-3\cdot 2^{n-1}-4(-5)^{n-1}\}$

[*20] (1) $a_n+kb_n=(a_1+kb_1)t^{n-1}$ (2) $a_n=\dfrac{1}{2}(5\cdot 5^{n-1}+3^{n-1})$, $b_n=\dfrac{1}{2}(5\cdot 5^{n-1}-3^{n-1})$
(3) ア $(4-2t)$ イ $(-9+t)$ ウ , エ $a_{n+1}+3b_{n+1}=-2(a_n+3b_n)$ と $a_{n+1}-\dfrac{3}{2}b_{n+1}=7\Big(a_n-\dfrac{3}{2}b_n\Big)$
オ $(-2)^{n-1}+8\cdot 7^{n-1}$ カ $\dfrac{1}{3}\{2(-2)^{n-1}-8\cdot 7^{n-1}\}$

[*21] (1) $a_n=\dfrac{2^{n-1}}{3\cdot 2^{n-1}-2}$ (2) $a_n=\dfrac{(3n-1)2^n}{4}$