高校数学 Web 問題集

−basic 3−

(利用上の注意点)

この問題集のほとんどはオリジナルに作成されたものです。個人が自らの学習のためにこのファイルを利用することは構いませんが、商用利用および著作権の所在が不明瞭になるような形での二次配布については、固くその行為を禁止致します。特に説明部分の記述についての著作権は当サイト「ky の書架」に帰属しますので御注意下さい。なお高校の授業等での利用を希望される方は問い合わせフォーム(TOP ページにアクセスすると"問い合わせ" のメニューがあります)にて御連絡下さい。

また間違い等(おそらくたくさんあります)を発見された場合にも御連絡いただけると助かります。

最終更新日　2010.3/30

web サイト「ky の書架」にはこれ以外にも「ウィルソンの定理の初等的証明」・「大学入試の整数問題」などのファイルがあります。興味のある方は url(http://kynoshoka.com/)を直接入力するか、サイト名で google または yahoo 検索してアクセスして下さい。

3　ベクトル

3.1　ベクトルの和・差・スカラー倍

① 加法

考え方は以下の 2 通りある。平行移動で重なるものは同一のベクトルなので、どちらを定義にしても同じ結果になる。(→枠内下図参照)

(i) 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のつくる平行四辺形の対角線を考えて $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ を定める。

(ii) $\overrightarrow{a}$ の終点を $\overrightarrow{b}$ の始点として 2 つのベクトルをつないで $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ を定める。

② スカラー倍

k の符号によって $\overrightarrow{a}$ に対しての $k\overrightarrow{a}$ の向きが変わることには注意が必要だが、拡大率 k の伸縮である。

③ 減法

$\overrightarrow{a}+\boxed{}=\overrightarrow{b}$ を満たす $\boxed{}$ が $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$ の定義である。これが図形的にどんなイメージかはしっかりと掴んでおく必要がある。また $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ より特に $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ である。この変形は問題を解く際に必要となることが多く、重要である。

注) ②から逆ベクトル $-\overrightarrow{a}$ が定義されるが、$\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}+(-\overrightarrow{a})$ を差の定義としてもよい。この考え方で計算した方がわかりやすいことも多く、これはこれで覚えておきたい。

④ 演算法則

加法についての交換則や結合則が成り立つなど本来は確認すべきであるが、文字計算と同様になるので、計算する場合にはあまりこだわらなくても良い。

⑤ 成分表示と計算

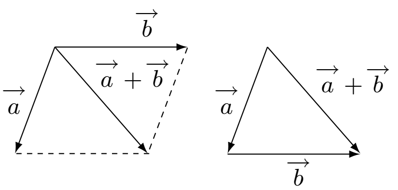
(i) 点 $\mathrm{A}(x_1\,,\,y_1)$, $\mathrm{B}(x_2\,,\,y_2)$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_2-x_1,\,y_2-y_1)$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示という。

(ii) $\overrightarrow{x}=(a\,,\,b)$, $\overrightarrow{y}=(c\,,\,d)$ に対して和・差・スカラー倍は以下のようになる。

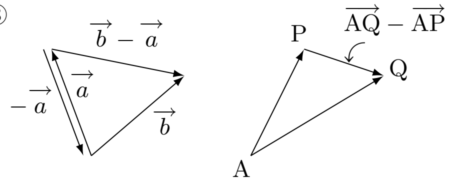
$$\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=(a+c\,,\,b+d)\;,\;\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}=(a-c\,,\,b-d)\;,\;k\overrightarrow{x}=(ka\,,\,kb)$$

注) (ii)の計算については① ~ ③とどのような関係にあるのかを、各自 xy 平面で確認してみること。なお空間座標については z 成分が加わるだけで、計算方法等は同じである。

①



③



⑥ 内分公式

線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とするとき以下の関係が成り立つ。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

問題 3.1.1 [*1]

正六角形 ABCDEF の 3 つの対角線 AD , BE , CF の交点を O とし、辺 DE の中点を H とする。また辺 AF , BC をそれぞれ $5:2$, $2:1$ に内分する点を順に G , I とし、さらに線分 CE を $2:3$ に内分する点を J とする。以下の各ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ (4) $\overrightarrow{\mathrm{FB}}$ (5) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ (6) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$

(7) $\overrightarrow{\mathrm{FI}}$ (8) $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$

問題 3.1.2 [*2]

xy 平面に平行四辺形 ABCD があり $\mathrm{A}(1\,,2)$, $\mathrm{B}(4\,,3)$, $\mathrm{D}(2\,,6)$ である。また辺 BC を $1:2$ に外分する点を E とし、$1:2$ に内分する点を F とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と点 C の座標を求めよ。

(2) 点 E , F の座標をそれぞれ求めよ。

問題 3.1.3 [*3]

$2\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, $3\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 5\vec{a} + \vec{b}$ であるとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。 (2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で表せ。

(3) O は xy 平面の原点で $\vec{a} = (-1\,,3)$, $\vec{b} = (2\,,-4)$ とする。点 P の座標を求めよ。

問題 3.1.4 [*4]（内分公式の証明）

$\triangle$ABC において P は辺 BC を $m:n$ に内分する点とする。さらに P を通って辺 AC に平行な直線と辺 AB との交点を B' とし、P を通って辺 AB に平行な直線と辺 AC との交点を C' とする。

(1) $\mathrm{AB}':\mathrm{B}'\mathrm{B}$, $\mathrm{AC}':\mathrm{C}'\mathrm{C}$ をいえ。 (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}'}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}'}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

問題 3.1.5 [*5]（外分）

(1) 平面に直線 AB と、直線 AB 上にない点 O がある。さらに線分 AB を $5:2$ に外分する点を P とする。直線 OB と P を通って直線 OA に平行な直線との交点を C として以下の問いに答えよ。

(i) OB : BC , OA : CP をそれぞれ求めよ。 (ii) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(2) (1)において $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で表せ。さらにその結果から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表した式を求めよ。

(3) 線分 AB の $m:n\,(m<n)$ の外分点を Q とする。(1)の方法にならって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を m, n, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

[*1] (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ (2) $\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ (4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ (5) $\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ (6) $\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$
(7) $\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ (8) $\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{7}{5}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

[*2] (1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1\,,4)$, $\mathrm{C}(5\,,7)$ (2) $\mathrm{E}(3\,,-1)$, $\mathrm{F}\left(\frac{13}{3}\,,\frac{13}{3}\right)$

[*3] (1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{7}{3}\vec{b}$ (2) $\vec{a} = \frac{2}{23}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{12}{23}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\vec{b} = -\frac{10}{23}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{9}{23}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ (3) $\mathrm{P}\left(-\frac{11}{2}\,,\frac{25}{2}\right)$

[*4] (1) 順に $n:m$, $m:n$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}'} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}'} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

[*5] (1) (i) どちらも $3:2$ (ii) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (iii) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{n}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{m}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

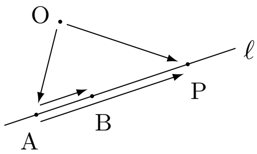
3.2　点 P が直線 AB 上にあるための条件

この条件の表現はどの点を始点とするかで 2 通りある。(以下直線 AB を ℓ とする)

① ℓ 上の点 A を始点とする。

直線 ℓ 上に点 P がある

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす k が存在する



② 一般的に始点 O をとる。

直線 ℓ 上に点 P がある

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす t が存在する

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす t が存在する

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $x + y = 1$ を満たす x, y が存在する

注) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdots (*)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同値であるが、さらに $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と言い換えられる。この t は線分 AB において A からみた、B の位置に対してのP のありか、を示している。すなわち $(*)$ での $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数を読み取ることで線分 AB における点 P の分点比がわかる。また $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の係数は線分 BA における点 P の分点比を教えてくれる。($(*)$ は $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と同値)

問題 3.2.1 [*6]

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立とする。点 P が直線 AB 上にあるのは次のどの場合か。なお直線上にある点 P については、線分 AB においての分点比も答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるとき。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるとき。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -5\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 7\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるとき。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\sqrt{2}-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (\sqrt{3}-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるとき。

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるとき。

(6) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-\sqrt{2})\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \sqrt{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるとき。

問題 3.2.2 [*7]

(1) 直方体 OABC − PQRS において、△PAC の重心を G とする。3 点 O , G , R は同一直線上にあることを証明せよ。

(2) △OAB において辺 OA の 2 : 3 の内分点を P、辺 OB の 7 : 6 の内分点を Q、線分 AB の 7 : 4 の外分点を R とする。

(ｱ) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(ｲ) 3 点 P , Q , R が同一直線上にあることを証明せよ。

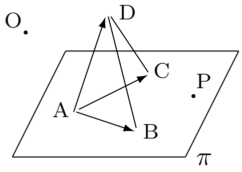
[*6] (1) 点 P は 3 : 4 の外分点　(2) 点 P は 3 : 1 の内分点　(5) 点 P は 2 : 3 の外分点 ($t = -2$ で $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$)
(6) 点 P は $\sqrt{2} : (\sqrt{2}-1)$ の外分点　($t = \sqrt{2}$ で $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \sqrt{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$)

[*7] (1) 略　(2) (ｱ) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{7}{13}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = -\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{7}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(ｲ) 略

3.3　点 P が平面 ABC 上にあるための条件

この場合もどの点を始点とするかでいくつかの表現がある。(以下 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は同一平面上にない、すなわち 1 次独立な 3 つのベクトルである。また $\triangle$ABC を含む平面を π とする。)

① π 上の点 A を始点とする。



平面 π 上に点 P がある

$\iff$ 適当な α, β が存在して $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $\cdots(*)$

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ としたとき $\gamma = 0$ $\cdots(\natural)$

② 一般的に始点 O をとる。

平面 π 上に点 P がある

$\iff$ 適当な α, β が存在して $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $\cdots(\diamondsuit)$

$\iff$ 適当な α, β が存在して $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\iff$ $x+y+z=1$ である適当な x, y, z が存在して $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}} + z\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $\cdots(\heartsuit)$

この 2 つは、考えるべき平面上にベクトルの始点があるかどうかで、使い分ければよい。各行の条件における式の表現はそれぞれ重要であるが、特に$(*)(\diamondsuit)$は点 P が平面上にあることの直感的表現であり、問題解法において最初に持ち出す形である。また$(\natural)$は、1 次独立が保証する表現の一意性を用いて係数比較する場合に使うことが多い。$(\heartsuit)$については点 P が直線 AB 上にあるための条件「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ において $x+y=1$」と同様の形であり、あわせて覚えておきたい。

問題 3.3.1 [*8]

四面体 OABC において、辺 BC を 2 : 1 に内分する点を D, 線分 AD の中点を E, 線分 OE の中点を F, 直線 CF と $\triangle$OAB の交点を G とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおける。一方で $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ とも表される。これを利用して $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

問題 3.3.2 [*9]

平行六面体 OABC − DEFG において辺 OC, OD の中点をそれぞれ M, N とし、$\triangle$AMN を含む平面と対角線 OF の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ とおける。この α, β を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ で表せ。

(2) 一方で $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ とおける。この 2 つの表現を利用して $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ で表せ。

[*8] (1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

[*9] (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\alpha\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{1}{2}\beta\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}})$

問題 3.3.3 [*10]

xyz 空間に 4 点 $\mathrm{A}(1\,,\,0\,,\,0)\,,\,\mathrm{B}(-1\,,\,2\,,\,1)\,,\,\mathrm{C}(2\,,\,1\,,\,3)\,,\,\mathrm{D}(0\,,-2\,,\,0)$ がある。また原点を O とする。

(1) $\triangle$OAB を含む平面と直線 CD の交点の座標を求めよ。

(2) $\triangle$ABD を含む平面を π とする。平面 π と z 軸、直線 OC との交点をそれぞれ求めよ。

[*10] (1) $\left(-\dfrac{4}{3}\,,\,-4\,,\,-2\right)$ (2) 順に $\left(0\,,\,0\,,\,\dfrac{1}{3}\right)$, $\left(\dfrac{4}{21}\,,\,\dfrac{2}{21}\,,\,\dfrac{2}{7}\right)$

3.4　内積

(*Definition*)

$\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ についてなす角を θ として、以下の式の右辺を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の内積といい $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ で表す。すなわち

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

また一方が $\overrightarrow{0}$ のときは $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 0$ と定める。　□ ⧄

注）一方が $\overrightarrow{0}$ の場合もなす角を定義すると都合が良いと思うのだが。

この定義が出発点であるが内積の計算方法はいくつかある。

① 内積の定義から

② 成分計算

$\overrightarrow{a} = (x_1\,,\,y_1)$, $\overrightarrow{b} = (x_2\,,\,y_2)$ であるとき $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

また $\overrightarrow{a} = (x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)$, $\overrightarrow{b} = (x_2\,,\,y_2\,,\,z_2)$ であるとき $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

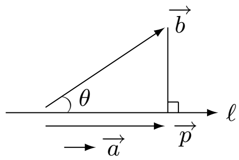
③ 既知の内積の利用(線形性から)

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}$ の値がわかっていて、かつ $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ が $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の線形結合で表されるときは $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d} = (x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b})\cdot(z\overrightarrow{a} + w\overrightarrow{b}) = \sim$ などとすればよい。

④ 正射影の利用

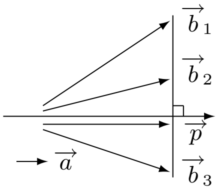
$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ において $|\overrightarrow{b}|\cos\theta$ とは右図のように $\overrightarrow{a}$ の向く方向に ℓ 軸を設定したときの $\overrightarrow{p}$ の ℓ 成分 ($= \overrightarrow{b}$ の ℓ 成分) である。したがって

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times (\overrightarrow{p} \text{ の } \ell \text{ 成分})$$



である。ここで $\overrightarrow{p}$ は $\overrightarrow{b}$ の直線 ℓ への正射影ベクトルである。

なおこれから特に $\overrightarrow{a}$ が $\overrightarrow{0}$ でないとき、$\overrightarrow{a}$ と ℓ 軸への正射影ベクトルが同一である任意のベクトルとの内積は同じ値になることがわかる。例えば右図においては



$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}_2 = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}_3 = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}$$

である。また逆に $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{y}$ であるとき $\overrightarrow{x}$ と $\overrightarrow{y}$ の ℓ 軸への正射影ベクトルは一致する。

問題 3.4.1 [*11]

長方形 ABCD において $\mathrm{AB} = 1$, $\mathrm{BC} = \sqrt{3}$ であるとき、以下の内積の値を求めよ。なお、対角線の交点を点 E とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　(6) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EB}}$

[*11] (1) 0　(2) 3　(3) -1　(4) 1　(5) 2　(6) $-\frac{1}{2}$

問題 3.4.2 [*12]

(1) 辺の長さが $\mathrm{AB}=x$, $\mathrm{BC}=z$, $\mathrm{CA}=y$ である△ABC について $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を x , y , z で表せ。

(2) 辺の長さが $\mathrm{AB}=6$, $\mathrm{BC}=7$, $\mathrm{CA}=5$ である△ABC について以下の問いに答えよ。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値を求めよ。　(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ。

(iii) 点 C から辺 AB への垂線の足を点 H とする。(i)の結果を用いて線分の長さ AH を求めよ。

問題 3.4.3 [*13]

(1) O を原点、また $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ を証明せよ。

(2) xyz 空間で $\mathrm{A}(-1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0, 3)$ とする。いま点 P が点 $(1, 2, 0)$ を通って z 軸と平行な直線上を動くとき $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最小値を求めよ。

問題 3.4.4 [*14]

(1) $\mathrm{AB}=6$, $\mathrm{AC}=3$, $\angle A=45^\circ$ である△ABC において、辺 AB の中点を D とし、辺 BC を 3 等分する 2 点を点 B に近い方から E, F とする。

(i) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ の値を求めよ。　(ii) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ の値を求めよ。

(2) 一辺の長さが 2 の正四面体 OABC において、辺 AB の中点を M とし、辺 BC を 2 : 1 に内分する点を N とするとき、内積 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ の値を求めよ。

問題 3.4.5 [*15]

$\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{AC}=2$ である△ABC においてこの外心を O とし、垂心を H とする。

(1) $\angle A=60^\circ$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\angle A=150^\circ$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ の値をそれぞれ求めよ。

[*12] (1) $\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2}$　(2) (i) 6 (ii) -30 (iii) 1

[*13] (1) 略 (2) $\dfrac{7}{4}$

[*14] (1) (i) $6+3\sqrt{2}$ (ii) $10+5\sqrt{2}$ (2) $-\dfrac{2}{3}$

[*15] (1) 順に 8 , 4 (2) 順に 8 , $-4\sqrt{3}$

3.5 内積の応用

内積の応用例としては以下のようなものがある。

① 直交条件の処理

直交条件は (内積) $=0$ を考えればよい。

② 2 つのベクトルのなす角またはその余弦を求める。

内積の定義式を変形すると $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$ となるので、この右辺の値が求まれば $\cos\theta$ の値もわかる。

③ 線分の長さを求める。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos 0=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 \qquad \text{(結果は重要公式)}$$

より、例えば線分 AB の長さは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の内積から求められる。

④ 三角形の面積を求める。

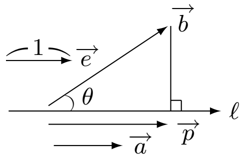
2.11 で既にまとめたように、三角形(平行四辺形)の面積の求め方はいろいろあるが、特に $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ のつくる三角形の面積は $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{x}|^2|\overrightarrow{y}|^2-(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y})^2}$ である。

さらに $\overrightarrow{x}=(a\,,\,b)$, $\overrightarrow{y}=(c\,,\,d)$ とすると $S=\dfrac{1}{2}|ad-bc|$

注) これから(どちらも $\overrightarrow{0}$ でないときの)上の $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ の平行条件が $ad-bc=0$ であることがわかる。この性質も使われることが多く、覚えておきたい。

⑤ 正射影ベクトルを求める。

既に 3.4 ④で触れたように右図において $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積は $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\times\left(\overrightarrow{p}\text{ の }\ell\text{ 成分}\right)$ である。



これから $\left(\overrightarrow{p}\text{ の }\ell\text{ 成分}\right)=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|}$ となるので

$$\overrightarrow{p}=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|}\times\frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}=\left(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2}\right)\overrightarrow{a}$$

という正射影ベクトルの公式を得る。なお単位ベクトル $\overrightarrow{e}=\dfrac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}$ を用いると $\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{e}|\times\left(\overrightarrow{p}\text{ の }\ell\text{ 成分}\right)$ より $\left(\overrightarrow{p}\text{ の }\ell\text{ 成分}\right)=\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{b}$ である。すなわち単位ベクトルとの内積をとると、正射影ベクトルの ℓ 成分になるので

$$\overrightarrow{p}=\left(\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{e}$$

という式が得られる、と考えてもよい。

問題 3.5.1 [*16]

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{x}=(a\,,\,a+1)$, $\overrightarrow{y}=(a-2\,,\,8)$ が直交するような a の値を求めよ。また平行となるような a の値を求めよ。

(2) 空間に 3 点 $\mathrm{A}(-1\,,\,a\,,\,4)$, $\mathrm{B}(2\,,\,2a-2\,,\,1)$, $\mathrm{C}(2b\,,\,a\,,\,a-1)$ がある。$\triangle\mathrm{ABC}$ が $\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形になるような a, b の値を求めよ。

(3) 正四面体 ABCD において 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は直交することを示せ。

[*16] (1) 直交 -2 , -4 : 平行 $\dfrac{9\pm\sqrt{89}}{2}$ (2) $(a\,,\,b)=(14\,,\,4)$, $(2\,,\,-2)$ (3) 略

問題 3.5.2 *17

(1) $\mathrm{AB}=3$, $\mathrm{AC}=2$, $\angle A=60^\circ$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ について以下の問いに答えよ。

(i) 点 A から辺 BC への垂線の足を H とする。点 H は直線 BC 上にあることから $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せる。$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるような t の値を求め、$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

(ii) 線分 BC を 3 : 1 に内分する点を D とする。$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ の値を求めよ。

(2) xyz 空間に点 $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(3,-1,0)$, $\mathrm{C}(-1,3,1)$ がある。また原点を O とする。点 C から直線 OA への垂線の足 P と、点 C から直線 AB への垂線の足 Q の座標をそれぞれ求めよ。

問題 3.5.3 *18

(1) $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(5,2)$, $\mathrm{C}(1,8)$ とする。ベクトルの内積を用いて $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ。

(2) 2 つのベクトル $\overrightarrow{x}=(2,1,1)$, $\overrightarrow{y}=(2a,a+1,a-2)$ のなす角が 135° となるような a の値を求めよ。

(3) 正四面体 ABCD において辺 AD の中点を E とする。さらに 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ のなす角を θ として $\cos\theta$ を求めよ。

問題 3.5.4 *19

$\triangle\mathrm{ABC}$ について以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とする。$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\sin\angle A$ から出発して三角形の面積公式

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ を証明せよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,b)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c,d)$ であるとき S を a, b, c, d で表せ。

(3) 点 C から直線 AB への垂線の足を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であることから $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ としたときの k を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。(正射影ベクトルの公式の別証)

問題 3.5.5 *20

(1) xy 平面に直線 $y=2x$ と点 $\mathrm{B}(3,2)$ がある。さらに点 B から直線への垂線の足を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の直線への正射影ベクトルであることを用いて、点 H の座標を求めよ。

なお $\overrightarrow{a}=(1,2)$ は直線の方向ベクトルである。

(2) xyz 空間に 3 点 $\mathrm{A}(1,1,1)$, $\mathrm{B}(2,-1,3)$, $\mathrm{C}(0,0,14)$ がある。また、点 C から直線 AB への垂線の足を H とする。正射影ベクトルの公式を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ の成分を求めよ。さらに点 H の座標を求めよ。

---

*17 (1) (i) $t=\dfrac{6}{7}$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{103}}{4}$ (2) $\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{7},\dfrac{8}{7},\dfrac{12}{7}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{10}{11},\dfrac{47}{22},\dfrac{69}{22}\right)$

*18 (1) $\dfrac{2}{5\sqrt{5}}$ (2) $\dfrac{1-\sqrt{29}}{6}$ (3) $\dfrac{-1}{2\sqrt{3}}$

*19 (1) 略 (2) $\dfrac{1}{2}|ad-bc|$ (3) $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}$

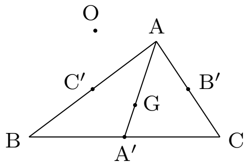
*20 (1) $\left(\dfrac{7}{5},\dfrac{14}{5}\right)$ (2) 順に $(3,-6,6)$, $(4,-5,7)$

3.6　三角形の五心とベクトルその１

三角形の五心はしばしば題材にされる。それぞれの作図方法と図形的性質、さらにベクトルでの表現のしかたは覚えておくべきである。

① 重心

各頂点と対辺の中点をつなぐ 3 本の中線は 1 点で交わるが、この交点が重心である。右図において A', B', C' はそれぞれ辺の中点で、G は $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心とする。ここで重心 G が各中線の $2:1$ の内分点であること、すなわち



$$\mathrm{AG}:\mathrm{GA}'=\mathrm{BG}:\mathrm{GB}'=\mathrm{CG}:\mathrm{GC}'=2:1$$

であるのは重要な性質である。2 本の中線の交点として重心の作図はできるが、これを用いると中線を 1 本だけ引けばよいことになる。さらにこの分点比から

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

であることが導かれる。ここで始点 O はどこに定めてもよいが特に頂点 A に重ねると

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

という式になる。問題を解くときはむしろこの形を使うことが多い。

② 内心

内心とは内接円の中心であるが、図形的には「三角形の内部にあって 3 辺から等距離にある点」である。3 辺からの距離を一斉に考えるのは大変だが、2 辺から等距離にある点は考えやすい。すなわち内角の二等分線がそのような性質をもつ点の集合である。これから内角の二等分線を 2 本引き、交わる点が内心であることがわかる。

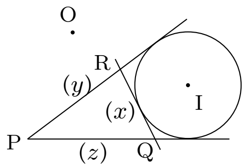
内心と傍心については角の二等分線がポイントであるが、この図形的性質は既に 2.14 で触れた通りである。この線分比を利用して $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心 I へのベクトルは求まる。すなわち 3 辺の長さを $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ として以下の関係式になる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

③ 傍心

傍心とは傍接円の中心であるが「三角形の外部にあって各辺(またはその延長線)からの距離が等しい点」である。各頂点の内角・外角の二等分線を考えて、1 つの内角の二等分線と他の 2 つの外角の二等分線の共有点であることがわかる。なお、一つの三角形に対して傍心(傍接円)は 3 つある。

たとえば右図の場合も外角の二等分線の性質を用いて



$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{(-x)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+y\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+z\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{(-x)+y+z}$$

となることがわかる。なおここで x, y, z はそれぞれ辺 QR, RP, PQ の長さである。

問題 3.6.1 [*21]

(1) xy 平面に点 $\mathrm{A}(0\,,\,12)\,,\,\mathrm{B}(-9\,,\,0)\,,\,\mathrm{C}(5\,,\,0)$ がある。このとき $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心、内心、第 I 象限にある傍心、の座標をそれぞれ求めよ。

(2) $\mathrm{AB}=4\,,\,\mathrm{BC}=x\,,\,\mathrm{CA}=3$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とし、内心を I とする。$\overrightarrow{\mathrm{IG}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行となるような x の値を求めよ。

問題 3.6.2 [*22]

xy 平面に $\triangle\mathrm{ABC}$ がある。辺 BC , CA , AB の中点をそれぞれ $\mathrm{A}'\,,\,\mathrm{B}'\,,\,\mathrm{C}'$ とすると、3 点の座標は $\mathrm{A}'(15\,,\,4)\,,\,\mathrm{B}'(21\,,\,15)\,,\,\mathrm{C}'(6\,,\,11)$ である。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ の重心 G' は同一点であることを次の二通りの方法で示せ。

(i) 線分 AA' を 6 等分して考える。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OG'}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表す。

(2) 重心 G の座標を求めよ。

問題 3.6.3 [*23]

$\triangle\mathrm{ABC}$ において辺 BC , CA の中点をそれぞれ $\mathrm{A}'\,,\,\mathrm{B}'$ とし、線分 $\mathrm{AA}'\,,\,\mathrm{BB}'$ の交点を G とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表せ。　　(2) $\mathrm{AG}:\mathrm{GA}'=2:1$ を示せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ。

問題 3.6.4 [*24]

$\mathrm{BC}=a\,,\,\mathrm{CA}=b\,,\,\mathrm{AB}=c$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ において $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。また $\angle B$ の二等分線と線分 AD との交点を I とする。

(1) 線分 BD の長さを $a\,,\,b\,,\,c$ で表せ。　　(2) 線分の長さの比 $\mathrm{AI}:\mathrm{ID}$ を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ。

問題 3.6.5 [*25]

$\mathrm{BC}=a\,,\,\mathrm{CA}=b\,,\,\mathrm{AB}=c$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ において $\angle B$ の内角の二等分線と辺 AC との交点を D とする。また $\angle B$ の内角の二等分線と $\angle A$ の外角の二等分線との交点を I とする。

(1) 線分 AD の長さを $a\,,\,b\,,\,c$ で表せ。　　(2) 線分の長さの比 $\mathrm{BI}:\mathrm{ID}$ を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ で表せ。また $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ。

[*21] (1) 順に $\left(-\dfrac{4}{3}\,,\,4\right)\,,\,(-1\,,\,4)\,,\,\left(12\,,\,\dfrac{21}{2}\right)$ (2) 5

[*22] (1) 略 (2) $(14\,,\,10)$

[*23] (1) $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (2) 略 (3) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

[*24] (1) $\dfrac{ac}{b+c}$ (2) $(b+c):a$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$

[*25] (1) $\dfrac{bc}{a+c}$ (2) $(a+c):b$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{BI}}=\dfrac{a+c}{a+c-b}\overrightarrow{\mathrm{BD}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}-b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a-b+c}$

3.7　三角形の五心とベクトルその２

重心・内心・傍心については分点比が重要だったのに対して、外心・垂心では直交条件がポイントである。ベクトルを持ち出す場合は、いうまでもなく内積の計算になる。

④ 外心

外心とは外接円の中心であるが、図形的には「3 頂点から等距離にある点」である。この場合もまず 2 頂点から等距離にある点を考える。頂点が A , B であるとき、2 頂点から等距離にある点の集合は線分 AB の垂直二等分線である。他の 2 頂点の組合せについても同様になるので、各辺の垂直二等分線(この 3 本は一点で交わる)の共有点が 3 頂点から等距離にある点で、外心である。作図は垂直二等分線を 2 本引くだけでよい。

⑤ 垂心

三角形の各頂点から対辺(またはその延長線)に引いた 3 本の垂線は一点で交わるが、この交点が垂心である。この作図も垂線を 2 本引くだけである。ただし三角形の形状によって垂線がどこで交わるかが変わってくるので、それぞれ描けるようにしておかなければならない。

問題 3.7.1 [*26]

3 点 $\mathrm{O}(0\,,\,0)\,,\ \mathrm{A}(4\,,\,3)\,,\ \mathrm{B}(6\,,\,0)$ を頂点とする三角形の垂心と外心の座標をそれぞれ求めよ。

問題 3.7.2 [*27]

$\mathrm{AB}=6\,,\ \mathrm{AC}=4\,,\ \angle A=60^\circ$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心を O、垂心を H とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値をそれぞれ求めよ。

(いずれも、内積 $=0$ を用いる方法と、正射影ベクトルを利用する方法の二通りがある。)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

問題 3.7.3 [*28]

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心を $\angle A$ が鋭角・直角・鈍角のそれぞれの場合について作図せよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ において点 B を通る直線 AC の法線と、点 C を通る直線 AB の法線との交点を H とする。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を示せ。

(これも、内積 $=0$ を用いる方法と、正射影ベクトルを利用する方法の二通りがある。)

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ を示せ。

[*26] 順に $\left(4\,,\,\dfrac{8}{3}\right)\,,\ \left(3\,,\,\dfrac{1}{6}\right)$

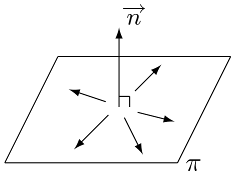
[*27] (1) 順に 18 , 8 , 12 , 12　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

[*28] (1) 略　(2) 略

3.8 平面とベクトルの直交

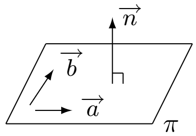
(*Definition*)

$\overrightarrow{n}$ が平面 π 上のすべてのベクトルと直交するとき、$\overrightarrow{n}$ と平面 π は直交するという。またこのとき、$\overrightarrow{n}$ を平面 π の法線ベクトルという。



さらに直線の方向ベクトルが平面の法線ベクトルであるとき、直線と平面は直交するという。 □ ◪

いま $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ を平面 π 上の一次独立な 2 つのベクトルとするとき、平面 π 上の任意のベクトル $\overrightarrow{p}$ は適当な x , y を用いて $\overrightarrow{p}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$ と表される。したがって $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{b}=0$ であるとき $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{p}=\overrightarrow{n}\cdot(x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b})=x(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{a})+y(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{b})=0$ であり、以下の同値関係が得られる。



(平面 π) $\perp$ $\overrightarrow{n}$

$\iff$ π 上のすべてのベクトルと $\overrightarrow{n}$ は直交する

$\iff$ π 上にあって一次独立な 2 つのベクトルのそれぞれと $\overrightarrow{n}$ は直交する

一般に平面に直交するベクトルを求めるには、平面上の 2 方向のベクトルとの直交条件を考えるのが原則である。

問題 3.8.1 [*29]

(1) 2 つのベクトル $(2\,,1\,,0)$, $(3\,,-1\,,2)$ の両方に直交する単位ベクトルを求めよ。

(2) xyz 空間で 3 点 $(0\,,0\,,0)$, $(1\,,2\,,0)$, $(-3\,,0\,,1)$ を通る平面の法線ベクトルを一ついえ。

(3) xyz 空間で 3 点 $(0\,,0\,,2)$, $(3\,,-4\,,-1)$, $(2\,,4\,,4)$ を通る平面の法線ベクトルを一ついえ。

問題 3.8.2 [*30]

(1) xyz 空間に点 $\mathrm{A}(4\,,-1\,,0)$, $\mathrm{B}(3\,,2\,,-2)$, $\mathrm{C}(0\,,0\,,3)$, $\mathrm{D}(5\,,4\,,3)$ がある。また点 D から $\triangle\mathrm{ABC}$ を含む平面への垂線の足を H とする。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の値をそれぞれ求めよ。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおける。$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を α , β を用いて表せ。

(iii) α , β および点 H の座標を求めよ。

(iv) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

(2) 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において辺 OB を 2 : 1 に内分する点を M とし、辺 OC の中点を N とする。さらに頂点 O から $\triangle\mathrm{AMN}$ を含む平面への垂線の足を H とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ とおける。(1) の方法にならって α , β を求め $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ。

[*29] (1) $\pm\dfrac{1}{3\sqrt{5}}(2\,,-4\,,-5)$ (2) 例えば $(2\,,-1\,,6)$ (3) 例えば $(1\,,-3\,,5)$

[*30] (1) (i) 順に $14\,,26\,,1\,,8\,,10$ (ii) 順に $-8+14\alpha+\beta$, $-10+\alpha+26\beta$ (iii) 順に $\dfrac{6}{11}$, $\dfrac{4}{11}$, $(2\,,1\,,0)$ (iv) $\dfrac{33}{2}$ (2) 順に $\dfrac{9}{35}$, $\dfrac{4}{5}$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\dfrac{2}{35}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{6}{35}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

補足

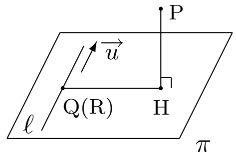
（三垂線の定理）

平面 π 上にない点 P から π への垂線の足を H とする。また π 上にあって H を通らない直線を ℓ とする。このとき

(i) H から ℓ への垂線の足を Q とすると $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \ell$

(ii) P から ℓ への垂線の足を R とすると $\overrightarrow{\mathrm{HR}} \perp \ell$

である。（すなわち 2 点 Q , R は同一点である。）



(i)の証明）

右図で $\overrightarrow{u}$ は直線 ℓ の方向ベクトルとすると、仮定より $\overrightarrow{\mathrm{PH}} \perp \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{HQ}} \perp \overrightarrow{u}$ である。したがって $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{\mathrm{PH}} + \overrightarrow{\mathrm{HQ}}) \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\mathrm{HQ}} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ であって $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と直線 ℓ は直交する。　（(ii)の証明もこれとほぼ同様である。各自確認せよ。）

ここで重要なのは仮定として与える 2 つの直交条件で、平面に対しての法線方向が定まることである。すなわち直線 ℓ と $\triangle$PHQ(R) を含む平面は直交するのであり、この平面上のすべてのベクトルは ℓ と垂直である。

（外積）（内積、外積はそれぞれ scalar product , vector product などである。）

$\overrightarrow{p} = (a\,,\,b\,,\,c)$, $\overrightarrow{q} = (x\,,\,y\,,\,z)$ を並べた以下の行列において左から一列ずつをはずして出来る行列を A, B, C とする。

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{p} \to \\ \overrightarrow{q} \to\end{array} \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad A = \begin{pmatrix} b & c \\ y & z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & c \\ x & z \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}$$

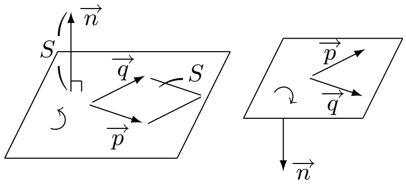
そしてそれぞれの行列式を計算して $(\,det\,A\,, -det\,B\,,\,det\,C\,)$ としたものを $\overrightarrow{p}$ と $\overrightarrow{q}$ の外積ベクトル、といい $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ と表す。

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ は以下の性質をもつ。

① $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{p}$ かつ $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{q}$

② $|\overrightarrow{n}| = (\overrightarrow{p}\,,\,\overrightarrow{q}$ のつくる平行四辺形の面積)

③ $\overrightarrow{n}$ は $\overrightarrow{p}$ を $\overrightarrow{q}$ に重ねる右ねじの方向を向く。



注）外積については交換則は成立しない。一般に $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} = -\left(\overrightarrow{q} \times \overrightarrow{p}\right)$ である。

問題 3.8.3 *31

(1) 問題 3.8.1 の答を外積を用いて求めよ。

(2) 問題 3.8.2 (1) について $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。また以下の問いに答えよ。

(i) $\overrightarrow{n}$ の方向に座標軸 h を設定する。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の h 軸への正射影ベクトルの h 成分 $\dfrac{1}{|\overrightarrow{n}|}\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を求めよ。

(ii) $$(\text{四面体の体積}) = (\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{n}| \times \left|\frac{1}{|\overrightarrow{n}|}\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|$$

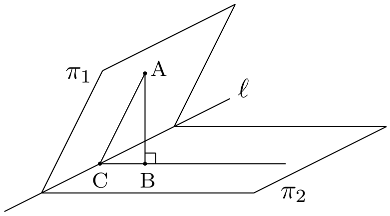
である。これを計算し、問題 3.8.2 (1) の答と同じになることを確かめよ。

注）$\dfrac{1}{6}$ のない形で平行六面体の体積の公式である。

*31 (1) 略　(2) (11 , 11 , 11) (i) $3\sqrt{3}$ (ii) 略

問題 3.8.4 [*32]

　2 平面のなす角とは、それぞれの法線ベクトルのなす角のことである。これはまた 2 平面が平行ではなく直交もしないとき、右図の $\angle$ACB に等しくなる。これを以下の手順で証明せよ。なお ℓ は 2 平面の交線、A は平面 π_1 上の点、また点 A から平面 π_2 と直線 ℓ への垂線の足が、それぞれ B , C である。



(1) $\triangle$ABC を含む平面 π_3 と直線 ℓ は直交することを示せ。

(2) 直線 BC 上に点 D を $\angle\mathrm{CAD} = 90^\circ$ となるようにとる。次の 2 つを示せ。

　(i) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ のなす角と $\angle$ACB は大きさが等しい。

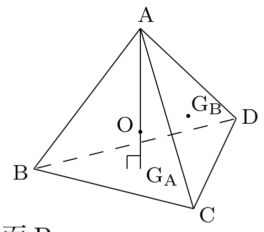
　(ii) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ は平面 π_1 の法線ベクトルである。

[*32] (1) ℓ は π_2 上にあり $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と直交。また $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とも直交より。

(2) (i) 略 (ii) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ は平面 π_3 上にあり ℓ と直交。また $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とも直交する。

3.9 正四面体の性質

正四面体 ABCD において頂点 A , B , C , D の各対面を P_A , P_B , P_C , P_D とし、また各対する三角形の重心を G_A , G_B , G_C , G_D とする。このとき以下が成り立つ。



① 頂点とその頂点に対する三角形の重心をつなぐ線分は頂点の対面に垂直である。すなわち

$$AG_A \perp 面\,P_A\ ,\ BG_B \perp 面\,P_B\ ,\ CG_C \perp 面\,P_C\ ,\ DG_D \perp 面\,P_D$$

なお逆に頂点から対面に下ろした垂線の足は、対する三角形の重心である。

② 4 本の線分 $AG_A , BG_B , CG_C , DG_D$ は同一点で交わり、かつその点を O として

$$AO : OG_A = BO : OG_B = CO : OG_C = DO : OG_D = 3 : 1$$

③ 隣り合う二面のなす角を θ として $\cos\theta = \dfrac{1}{3} , \sin\theta = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$ である。また一辺の長さ a の正四面体の高さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a \times \dfrac{\sqrt{8}}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

④ 向かい合う二辺は垂直すなわち $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}\ ,\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}\ ,\ \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$

⑤ 向かい合う二辺の中点をつなぐ線分はその二辺のどちらとも直交する。またこのような中点をつなぐ線分は 3 本あるが、3 本はそれぞれの中点で交わり(この交点は②の点 O)、かつどの 2 組も直交する。

⑥ 正四面体の外接球・内接球の中心はいずれも②の点 O である。したがって外接球の半径は OA で、内接球の半径は OG_A である。

問題 3.9.1 *33

性質①,③,④について以下の問いに答えよ。

(1) ベクトルを用いて $AG_A \perp 面\,P_A$ および $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ を示せ。

(2) 頂点 A から面 P_A への垂線の足を H とする。H は △BCD の重心であることを示せ。

(3) 隣り合う二面のなす角 θ について $\cos\theta = \dfrac{1}{3} , \sin\theta = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$ であることを示せ。

(4) 一辺の長さ a の正四面体の高さおよび体積を求めよ。

問題 3.9.2 *34

性質②について以下の問いに答えよ。

(1) 2 本の線分 AG_A , BG_B が交わることを示せ。

(2) (1) の交点を O とする。$AO : OG_A = BO : OG_B = 3 : 1$ を示せ。

---

*33 (1) 略 (2) 略 (3) hint : 辺 CD の中点 M を用いる。(4) 順に $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$, $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

*34 hint : (1) 辺 CD の中点を M として $\theta = \angle AMB$ (2) 例えばメネラウスの定理

問題 3.9.3 [*35]

性質⑤,②について以下の問いに答えよ。

(1) 辺 CD の中点を M とし、辺 AB の中点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MN}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を示せ。

(2) さらに辺 BC , DA の中点をそれぞれ P , Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を示せ。

(3) 4 点 M , N , P , Q は同一平面上にあることを示せ。

(4) $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}})$ および $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}})$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で表せ。

(5) (4) と同様の計算をすることで性質②を示せ。

問題 3.9.4 [*36]

(1) $\mathrm{AB} = 4$, $\mathrm{BC} = 3$, $\mathrm{CA} = 5$ である三角形 ABC において辺 AB 上に $\mathrm{AP} = \mathrm{CP}$ である点 P と、点 B と辺 CA までの距離が等しい点 Q をとる。長さ AP , BQ を求めよ。

(2) 以下の手順で、辺の長さが a である正四面体 ABCD の外接球の半径 R を求めよ。

(i) 3 点 B , C , D から等距離にある点の軌跡を求める。

(ii) (i)の軌跡上にあって 2 点 A , C までの距離が等しい点 P を考える。

(3) 以下の手順で、辺の長さが a である正四面体 ABCD の内接球の半径 r を求めよ。

(i) 四面体の内部で、二面 ABC , ABD から等距離にある点の集合と二面 ABD , ACD から等距離にある点の集合を求める。

(ii) 内接球の中心は(i)で考えた 2 つの集合の共通部にあり、さらに二面 BCD , ACD までの距離が等しい点 Q を考える。

注) (2)の(i)に加えて 3 点 A , C , D から等距離にある点の軌跡を考えると、性質⑥の外接球についての記述が成り立つことがわかる。また(3)(i)の 2 つの集合の共通部は三面 ABC , ABD , ACD から等距離にある点の軌跡に他ならないが、加えて三面 ABC , ABD , BCD から等距離にある点の軌跡を考えることで性質⑥の内接球についての記述が成り立つことがわかる。

[*35] (1) 略　(2) 略　(3) 略　(4) どちらも $\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})$　(5) 略

[*36] (1) 順に $\dfrac{25}{8}$, $\dfrac{3}{2}$

(2) (i) △BCD の重心を G として軌跡は直線 AG　(ii) △AGC と点 P を考え R の方程式をつくる。

(3) (i) 辺 CD , BC の中点を M , N として集合は順に三角形 ABM , ADN の内部。

(ii) △BCD の重心を G として △AGM を考える。