高校数学 Web 問題集

− basic 2 −

(利用上の注意点)

この問題集のほとんどはオリジナルに作成されたものです。個人が自らの学習のためにこのファイルを利用することは構いませんが、商用利用および著作権の所在が不明瞭になるような形での二次配布については、固くその行為を禁止致します。特に説明部分の記述についての著作権は当サイト「ky の書架」に帰属しますので御注意下さい。なお高校の授業等での利用を希望される方は問い合わせフォーム (TOP ページにアクセスすると "問い合わせ" のメニューがあります) にて御連絡下さい。

また間違い等 (おそらくたくさんあります) を発見された場合にも御連絡いただけると助かります。

最終更新日　2012.2/10

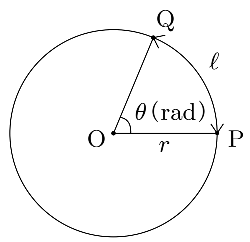
webサイト「ky の書架」にはこれ以外にも「ウィルソンの定理の初等的証明」・「大学入試の整数問題」などのファイルがあります。興味のある方は url(http://kynoshoka.com/)を直接入力するか、サイト名で google または yahoo 検索してアクセスして下さい。

2　三角比・三角関数と図形および平面幾何

2.1　弧度法

（*Definition*）

右図において、中心は O であり、円の半径は r とする。また P が Q に重なる弧の長さを $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ で表す。このとき扇形 OPQ の中心角 $\theta\,(\mathrm{rad})$ を次の式で定義する。



$$\theta\,(\mathrm{rad}) = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}}{r}$$

（重要関係式）

① 中心角が 180° の扇形の弧の長さは πr なので $180^\circ = \dfrac{\pi r}{r} = \pi\,(\mathrm{rad})$ である。また度数法と同様、弧度法についても比例関係が成り立つので $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\,(\mathrm{rad})$ である。

② 右上図において $\ell = r\theta \cdots (*)$ であることは定義式を変形して得られるが、重要である。また中心角と扇形の面積の間には比例関係があるので、円の面積 πr^2 と扇形 OPQ の面積 S について $\pi r^2 : S = 2\pi : \theta$, $S = \pi r^2 \times \dfrac{\theta}{2\pi}$ が成り立つ。これと$(*)$より次の公式を得る。

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r\ell$$

注）xy 平面の単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上において一周を超える角度や負の角度を考える方法は、度数法の場合と同様である。

問題 2.1.1 [*1]

(1) $54^\circ = \boxed{\quad}\,(\mathrm{rad})$, $\dfrac{\pi}{4}\,(\mathrm{rad}) = \boxed{\quad}^\circ$, $\dfrac{43}{9}\pi\,(\mathrm{rad}) = \boxed{\quad}^\circ$ である。また角度として 60° と $1\,(\mathrm{rad})$ では $\boxed{\quad}$ の方が大きい。

(2) 扇形 OPQ の半径・中心角・弧の長さ・面積を順に r, θ, ℓ, S とする。以下の問いに答えよ。

(i) $r = 3$, $\ell = 2\pi$ であるとき $\theta\,(\mathrm{rad})$, S を求めよ。

(ii) $r = 3$, $\theta = 2\,(\mathrm{rad})$ であるとき ℓ, S を求めよ。

(iii) $\theta = 36^\circ$, $\ell = 4$ であるとき r, S を求めよ。

(iv) $\ell = 5\pi$, $S = 30\pi$ であるとき r, $\theta\,(\mathrm{rad})$ を求めよ。

問題 2.1.2 [*2]

頂点と底円の中心をつなぐ線分が底円を含む面に対して垂直であるような円錐(直円錐)では、頂点と底円上の任意の点との距離が等しいため、側面を展開して平面にすると扇形が出来る。この図形について以下の問いに答えよ。

(1) 底円の半径が 3 で高さが $6\sqrt{2}$ である円錐から出来る扇形の中心角と弧の長さおよび面積を求めよ。

(2) 円錐の母線の長さ(頂点と底円上の一点との距離)が ℓ で底円の半径が r であるとき、この円錐から出来る扇形の面積を求めよ。(結果は側面積の公式)

[*1] (1) 順に $\dfrac{3\pi}{10}$, 45, 860, 60°　(2) (i) 順に $\dfrac{2\pi}{3}$, 3π　(ii) 順に 6, 9　(iii) 順に $\dfrac{20}{\pi}$, $\dfrac{40}{\pi}$　(iv) 順に 12, $\dfrac{5\pi}{12}$

[*2] (1) 順に $\dfrac{2\pi}{3}$, 6π, 27π　(2) $\pi r\ell$　(3) 順に $\dfrac{14}{\pi}$, $\dfrac{49}{\pi}$, $\dfrac{343\sqrt{15}}{24\pi^2}$

(3) 円錐から出来る扇形の中心角が $90°$ で弧の長さが 7 とする。このとき円錐の母線の長さ・扇形の面積・円錐の体積をそれぞれ求めよ。

2.2　三角比・三角関数の定義

(*Definition*)

① θ が鋭角のとき。直角三角形を用いて

$$\sin\theta = \frac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})}\,,\ \cos\theta = \frac{(\text{底辺})}{(\text{斜辺})}\,,\ \tan\theta = \frac{(\text{対辺})}{(\text{底辺})}$$

② 一般的には、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上で点 $(1\,,\,0)$ を原点中心に角度 θ 回転させた点を P として

$$\mathrm{P}\,\text{の}\,x\,\text{座標} = \cos\theta\,,\ \mathrm{P}\,\text{の}\,y\,\text{座標} = \sin\theta\,,\ \text{直線 OP の傾き} = \tan\theta$$

注）角度 θ は左回りを正方向として考える。

問題 2.2.1 [*3]

△ABC は $\angle C$ が直角の三角形とする。$\mathrm{AB} = 2\,,\ \angle A = \theta$ として、以下の問いに答えよ。

(1) 辺 AC , BC の長さをそれぞれ θ を用いて表せ。

(2) 頂点 C から辺 AB への垂線の足を H とする。線分 AH , BH , CH の長さをそれぞれ θ を用いて表せ。

問題 2.2.2 [*4]

円 $x^2 + y^2 = 1$ 上での点 P の位置を考えて、他の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = -\dfrac{4}{5}$　　ただし θ は第 4 象限の角。

(2) $\cos\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　　ただし θ は第 3 象限の角。

(3) $\tan\theta = -3$

問題 2.2.3 [*5]

xy 平面上で点 $\mathrm{A}(1\,,\,0)$ とする。点 P に対して $\angle\mathrm{POA} = \theta$ とするとき、以下のそれぞれについて $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ。ただし θ は線分 OA を左回りに線分 OP に重ねる方向を正として定めることとする。

(1) $\mathrm{P}(1\,,\,1)$　　(2) $\mathrm{P}(-1\,,\,\sqrt{3})$

(3) $\mathrm{P}(0\,,\,-3)$　　(4) $\mathrm{P}(3\,,\,-\sqrt{3})$

[*3] (1) 順に $2\cos\theta$, $2\sin\theta$　(2) 順に $2\cos^2\theta$, $2\sin^2\theta$, $2\sin\theta\cos\theta$

[*4] (1) $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$, $\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$　(2) $\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$

(3) $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\,,\,\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$ または $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\,,\,-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

[*5] (1) 順に $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 1　(2) 順に $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$　(3) 順に -1 , 0 , 存在しない

(4) 順に $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

問題 2.2.4 *6

　xy 平面上の以下の点を $(r\cos\alpha\,,\ r\sin\alpha)\ (r>0)$ という形で表せ。
(例えば $(0\,,2) = (2\cos 90^\circ\,,\ 2\sin 90^\circ)$ である。)

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\,,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(3) 第 2 象限で円 $x^2+y^2=9$ 上にあり y 座標が $\dfrac{3}{2}$ である点。

(4) $(2\sqrt{3}\,,\ 2)$　(5) $(-1\,,\ -1)$　(6) $(-3\,,\ 4)$

問題 2.2.5 *7

　円 $C : X^2+Y^2=1$, 点 $\mathrm{P}(\cos x\,,\ \sin x)$ とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}\big(\cos(270^\circ-4x)\,,\ \sin(270^\circ-4x)\big)$ とする。C 上での 2 点 P, Q の位置関係を考えて、方程式 $\sin x = \sin(270^\circ-4x)$ の解を求めよ。ただし $0^\circ < x < 90^\circ$ とする。

(2) 点 $\mathrm{R}\big(\cos(90^\circ-3x)\,,\ \sin(90^\circ-3x)\big)$ とする。C 上での 2 点 P, R の位置関係を考えて、方程式 $\cos x = \cos(90^\circ-3x)$ の解を求めよ。ただし $0^\circ < x < 90^\circ$ とする。

問題 2.2.6 *8

　円 $C : x^2+y^2=1$, 点 $\mathrm{P}(\cos\theta\,,\ \sin\theta)$ とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}\big(\cos(-\theta)\,,\ \sin(-\theta)\big)$ とする。C 上での 2 点 P, Q の位置関係を考えて $\cos(-\theta)$, $\sin(-\theta)$ を $\sin\theta$, $\cos\theta$ で表せ。

(2) 点 $\mathrm{R}\big(\cos(\pi-\theta)\,,\ \sin(\pi-\theta)\big)$ とする。C 上での 2 点 P, R の位置関係を考えて $\cos(\pi-\theta)$, $\sin(\pi-\theta)$ を $\sin\theta$, $\cos\theta$ で表せ。

(3) 点 $\mathrm{S}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right),\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$ とする。C 上での 2 点 P, S の位置関係を考えて $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ を $\sin\theta$, $\cos\theta$ で表せ。

(4) α は定数で $0<\alpha<\pi$ とする。θ の方程式 $\sin\alpha = \cos 2\theta\ (0 \leqq \theta < \pi)$ を解け。

問題 2.2.7 *9

　以下の三角関数を $\tan\theta$ で表せ。

(1) $\tan(\theta+\pi)$　(2) $\tan(\pi-\theta)$　(3) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$

(4) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

---

*6 (1) $(\cos 60^\circ\,,\ \sin 60^\circ)$ (2) $(\cos(-45^\circ)\,,\ \sin(-45^\circ))$ (角度は 315° でもよい。) (3) $(3\cos 150^\circ\,,\ 3\sin 150^\circ)$
(4) $(4\cos 30^\circ\,,\ 4\sin 30^\circ)$ (5) $(\sqrt{2}\cos 225^\circ\,,\ \sqrt{2}\sin 225^\circ)$
(6) 2 つのベクトル $(1\,,0)$, $(-3\,,4)$ のなす角を α として $(5\cos\alpha\,,\ 5\sin\alpha)$

*7 (1) 30°, 54° (2) $22,5^\circ$, 45°

*8 (1) 順に $\cos\theta$, $-\sin\theta$ (2) 順に $-\cos\theta$, $\sin\theta$ (3) 順に $\sin\theta$, $\cos\theta$
(4) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき 0, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ のとき $\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$

*9 (1) $\tan\theta$ (2) $-\tan\theta$ (3) $-\dfrac{1}{\tan\theta}$ (4) $\dfrac{1}{\tan\theta}$

2.3　三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

問題 2.3.1 [*10]

次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ,\ \cos 75^\circ$　　(2) $\cos 195^\circ,\ \tan 195^\circ$

(3) α は第 2 象限の角で $\tan\alpha=-\sqrt{2}$ であり、β は第 3 象限の角で $\sin\beta=-\dfrac{3}{5}$ であるときの $\sin(\alpha+\beta),\ \cos(\alpha-\beta)$

(4) $\cos 22.5^\circ,\ \tan 22.5^\circ$

(5) 2 直線 $y=2x,\ y=3x$ のなす鋭角を θ として $\tan\theta$

問題 2.3.2 [*11]

xy 平面上で点 $\mathrm{P}(1,\,3)$ とする。この点を原点を中心にして左回りに 60° 回転させた点の座標を求めよ。

問題 2.3.3 [*12]

加法定理と数学的帰納法を用いて

「任意の正整数 n について $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 」(ド・モアブルの公式)

であることを示せ。ここで i は虚数単位である。

問題 2.3.4 [*13]

以下の三角関数を $\sin\theta,\ \cos\theta$ で表せ。

(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$　　(2) $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)$　　(3) $\cos\left(\theta-\dfrac{3}{2}\pi\right)$

---

*10 (1) 順に $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　(2) 順に $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $2-\sqrt{3}$　(3) 順に $\dfrac{3\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{15}$, $\dfrac{4\sqrt{3}-3\sqrt{6}}{15}$
(4) 順に $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $-1+\sqrt{2}$　(5) $\dfrac{1}{7}$

*11 $\left(\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$

*12 略

*13 (1) $\cos\theta$　(2) $\sin\theta$　(3) $-\sin\theta$

2.4　加法定理から派生する計算その１

加法定理から以下の関係式が導かれる。公式ではあるが、丸暗記するだけでなくつくれるようにすることが重要である。

① ２倍角公式

$2\theta=\theta+\theta$ として加法定理を用いると

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta = 2\cos^2\theta-1 = 1-2\sin^2\theta \quad \cdots\cdots(*)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

となる。なお $(*)$ では $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いている。

② ３倍角公式

$3\theta=2\theta+\theta$ として加法定理および①を用いると

$$\sin 3\theta = \sin\theta(3-4\sin^2\theta)$$

$$\cos 3\theta = \cos\theta(4\cos^2\theta-3)$$

となる。また、ド・モアブルの公式(問題 2.3.3 参照)を用いて求めることもできる。

③ 半角公式

①$(*)$より次の２つの式が得られる。

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \quad , \quad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

また $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ である。

問題 2.4.1 [*14]

(1) 加法定理を用いて $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$ を θ の三角関数で表せ。

(2) 加法定理と(1)の結果を用いて $\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ で表せ。また $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ で表せ。

問題 2.4.2 [*15]

(1) 不等式 $\sin 2x+\cos x<0$ の解を求めよ。

(2) $y=\cos 2x+\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) 不等式 $\sqrt{2}\sin 2x+\cos 4x+1>0$ の解を求めよ。ただし $0\leqq x<2\pi$ とする。

問題 2.4.3 [*16]

$\tan\theta=m$ であるとき以下の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta$, $\sin\theta$ を m で表せ。

(2) $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ を m で表せ。

[*14] (1) 略　(2) 略

[*15] (1) $\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2n\pi$, $\frac{3\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{11\pi}{6}+2n\pi$ (n は任意の整数) (2) 順に 2 , $-\frac{9}{8}$
(3) $0\leqq x<\frac{5}{8}\pi$, $\frac{7}{8}\pi<x<\frac{13}{8}\pi$, $\frac{15}{8}\pi<x<2\pi$

[*16] (1) $(\cos\theta, \sin\theta)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ (2) 順に $\frac{1-m^2}{1+m^2}$, $\frac{2m}{1+m^2}$

2.5　特殊な角度の三角比

$18°$, $36°$, $72°$ といった角度についての三角関数の値を求める方法はいくつかあり、それぞれ覚えておきたい。

① 二等辺三角形の利用

$\triangle$ABC は $\angle A = 36°$, AB $=$ AC $= 1$ の二等辺三角形とする。いま $\angle B$ の二等分線と、辺 AC との交点を D として $\triangle$ABC $\backsim$ $\triangle$BCD であり、また BC $=$ BD $=$ AD であることから、辺 BC の長さが求まる。すなわち辺 BC の中点を H として、直角三角形 ABH から $\sin 18°$, $\cos 72°$ などが求まる。

② 正五角形の利用

一辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE において、2 つの対角線 AD , BE の交点を F とすると $\triangle$ABE $\backsim$ $\triangle$FEA である。また BF $=$ BA $= 1$ なので、対角線 BE の長さを知ることができる。すなわち対角線 BE の中点を H として、直角三角形 ABH から $\sin 54°$, $\cos 36°$ などが求まる。

③ 3 倍角公式などの利用

$\theta = 36°$ とすると $5\theta = 180°$, $180° - 2\theta = 3\theta$ であり、円 $C : x^2 + y^2 = 1$ 上で 2 点 $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, $(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ は y 軸対称である。すなわち $\sin 2\theta = \sin 3\theta$ となるので、これから $\cos\theta$ についての 2 次方程式をつくって $\cos 36°$ の値が求められる。

また $\theta = 18°$ とすると $5\theta = 90°$, $90° - 2\theta = 3\theta$ である。同様に円 C 上での 2 点を考えると $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, $(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ は直線 $y = x$ に関して線対称である。すなわち $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ となるので、これから $\sin\theta$ についての 2 次方程式をつくって $\sin 18°$ の値が求められる。

問題 2.5.1 [*17]

(1) 上記①において辺 BC の長さを求めよ。

(2) $\sin 18°$, $\cos 72°$ の値を求めよ。

問題 2.5.2 [*18]

(1) 上記②において対角線 BE の長さを求めよ。

(2) $\sin 54°$, $\cos 36°$ の値を求めよ。

問題 2.5.3 [*19]

上記③において、以下の問いに答えよ。

(1) $\sin 2\theta = \sin 3\theta$ を変形することで $\cos 36°$ を解とする 2 次方程式をつくれ。また $\cos 36°$ の値を求めよ。

(2) $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ を変形することで $\sin 18°$ を解とする 2 次方程式をつくれ。また $\sin 18°$ の値を求めよ。

[*17] (1) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (2) ともに $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

[*18] (1) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (2) ともに $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

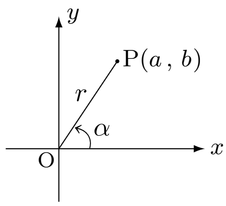
[*19] (1) $4x^2 - 2x - 1 = 0$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ (2) $4x^2 + 2x - 1 = 0$, $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

2.6　加法定理から派生する計算その２

三角関数の合成は、加法定理の逆戻りとなる①と、ベクトルの内積と考える②の 2 通りの方法がある。

① 三角関数の合成 (その 1)

xy 平面上に点 $\mathrm{P}(a\,,\,b)$ をとると、右下図の $r\,,\,\alpha$ を用いて $(a\,,\,b)=(r\cos\alpha\,,\,r\sin\alpha)$ である(→要問題2.2.4 確認)。これから



$$\begin{aligned} a\sin x+b\cos x &= r\cos\alpha\sin x+r\sin\alpha\cos x \\ &= r(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha) \\ &= r\sin(x+\alpha) \end{aligned}$$

となるが、これは加法定理の逆戻りに他ならない。

なお点 $(b\,,\,a)$ について同様に $r\,,\,\beta$ を定めると $(b\,,\,a)=(r\cos\beta\,,\,r\sin\beta)$ であり以下のようにコサインにまとめた式が得られる。

$$\begin{aligned} a\sin x+b\cos x &= r\sin\beta\sin x+r\cos\beta\cos x \\ &= r(\sin x\sin\beta+\cos x\cos\beta) \\ &= r\cos(x-\beta) \end{aligned}$$

② 三角関数の合成 (その 2)

$\overrightarrow{u}=(b\,,\,a)\,,\ \overrightarrow{v}=(\cos x\,,\,\sin x)$, 2 つのベクトルのなす角を φ として、内積を考えると

$$a\sin x+b\cos x=(b\,,\,a)\cdot(\cos x\,,\,\sin x)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\varphi=\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi$$

さらにベクトル $(1\,,\,0)$ を回転させて $\overrightarrow{u}=(b\,,\,a)$ と同方向になる角(左回りが正)を β として $\varphi=x-\beta$ としてよく

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\beta)$$

となる。

問題 2.6.1 [*20]

それぞれについて三角関数の合成をせよ。またグラフを描け。

(1) $\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$　　(2) $-\sin 2x+\cos 2x$　　(3) $\sqrt{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cos x$

[*20] (1) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ あるいは $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ など　(2) $\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ あるいは $\sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ など　(3) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ あるいは $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ など　(グラフは略)

問題 2.6.2 *21

(1) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x\ (0 \leqq x < 2\pi)$ の最大値・最小値と、それを与える x の値を求めよ。

(2) $y=a\sin x+b\cos x+c$ の最大値は 7 で最小値は -1 である。また最大値を与える 1 つの x は 60° である。このとき a, b, c の値を求めよ。

(3) $y=3\sin x+4\cos x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値と最小値を求めよ。

(4) 不等式 $\sin 2x+\cos 2x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ の解を求めよ。

問題 2.6.3 *22

長さ 2 の線分 AB を直径とする半円上に点 P をとり P から線分 AB に垂線 PH を下ろす。$\angle\mathrm{PAH}=\theta$ として以下の問いに答えよ。

(1) 線分の長さ PA , PB , PH , AH , BH をそれぞれ θ で表せ。

(2) $\mathrm{PH}+2\mathrm{AH}-\mathrm{BH}$ を 2θ の三角関数で表し、この最大値を求めよ。

---

*21 (1) 最大値 2 , $x=\dfrac{\pi}{3}$: 最小値 -2 , $x=\dfrac{4\pi}{3}$ (2) $a=2\sqrt{3}$, $b=2$, $c=3$ (3) 順に 5 , -4 (4) $0 \leqq x < \dfrac{7\pi}{24}$, $\dfrac{23}{24}\pi < x \leqq \pi$

*22 (1) 順に $2\cos\theta$, $2\sin\theta$, $2\cos\theta\sin\theta$, $2\cos^2\theta$, $2\sin^2\theta$ (2) 順に $\sin 2\theta+3\cos 2\theta+1$, $\sqrt{10}+1$

2.7　加法定理から派生する計算その３

和↔積の変形は 2 つの加法定理を組み合わせた結果である。すなわち以下のように、同種の加法定理のもつ性質が使われているだけであって、これについて公式の丸暗記を試みることは愚の骨頂である。

例）正弦の加法定理の組み合わせ

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

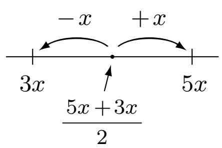
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

において、右辺が $xy+zw$, $xy-zw$ になっており、2 つの式の和(差)をとったとき左辺は和(差)に、右辺は積になる。余弦の 2 つの加法定理の組み合わせについても同様のことが成り立つ。式変形では

ｉ）$\sin(\alpha+\beta)$ と $\sin(\alpha-\beta)$

ii）$\cos(\alpha+\beta)$ と $\cos(\alpha-\beta)$

のどちらかの組み合わせを利用することだけを考えればよい。



〈和→積〉（右図のように考えて）

$$\begin{aligned}\sin 5x+\sin 3x &= \sin(4x+x)+\sin(4x-x)\\ &= (\sin 4x\cos x+\cos 4x\sin x)+(\sin 4x\cos x-\cos 4x\sin x)\\ &= 2\sin 4x\cos x\end{aligned}$$

〈積→和〉

$\left(\begin{array}{l}\sin(6x+2x) \text{ と } \sin(6x-2x) \text{ の組み合わせか、}\\ \cos(6x-2x) \text{ と } \cos(6x+2x) \text{ を用いるかを考えて}\end{array}\right)$

$$2\sin 6x\sin 2x=\cos(6x-2x)-\cos(6x+2x)=\cos 4x-\cos 8x$$

のようにすればよい。

問題 2.7.1 [*23]

(1) 和を積に直せ。

㈠ $\sin 7x-\sin x$　　㈡ $\cos 8x+\cos 2x$　　㈢ $\cos 7x-\cos 2x$

㈣ $\sin A+\sin B$

(2) 方程式・不等式を解け。ただし $0\leqq x\leqq\pi$ とする。

㈤ $\sin x=\sin 5x$　　㈥ $\cos 2x+\cos 3x<0$　　㈦ $\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0$

問題 2.7.2 [*24]

積を和に直せ。

(1) $2\sin 3x\cos x$　　(2) $\sin 2x\sin 5x$　　(3) $\cos A\cos B$　　(4) $\cos A\sin B$

[*23] ㈠ $2\cos 4x\sin 3x$　㈡ $2\cos 5x\cos 3x$　㈢ $-2\sin\dfrac{9}{2}x\sin\dfrac{5}{2}x$　㈣ $2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

㈤ $x=0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \pi$　㈥ $\dfrac{\pi}{5}<x<\dfrac{3}{5}\pi$　㈦ $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi$

[*24] (1) $\sin 4x+\sin 2x$　(2) $\dfrac{1}{2}(\cos 3x-\cos 7x)$　(3) $\dfrac{1}{2}\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$　(4) $\dfrac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}$

問題 2.7.3 [*25]

　$\angle C = 60^\circ$ の $\triangle$ABC について以下の問いに答えよ。

(1) $P = \sin A + \sin B$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $Q = \sin A \sin B$ のとりうる値の範囲を求めよ。

注）どちらも、$B = 120^\circ - A$ を代入して合成を利用する方法と、和$\leftrightarrow$積の変形の後に B を消去する方法の 2 通りがある。

2.8　三角形の成立条件

> 3 辺の長さが $x\,,\,y\,,\,z$ である三角形が存在するための必要十分条件(の 1 つ)は
>
> $$|x-y| < z < x+y$$
>
> が成り立つことである。これは「$x < y+z$ かつ $y < z+x$ かつ $z < x+y$」であることと同値である。また特に $\mathrm{Max}\{x\,,\,y\,,\,z\} = x$ のときは $x < y+z$ だけでよい。

問題 2.8.1 [*26]

　$|x-y| < z < x+y$ が成り立つとき「$x > 0$ かつ $y > 0$ かつ $z > 0$」であることを示せ。

問題 2.8.2 [*27]

(1) 3 辺の長さが $3\,,\,5\,,\,x$ である三角形ができるような x の値の範囲を求めよ。

(2) 3 辺の長さが $3\,,\,5\,,\,x^2+x$ である三角形ができるような x の値の範囲を求めよ。

(3) 3 辺の長さが $x\,,\,x+1\,,\,x+2$ である三角形ができるような x の値の範囲を求めよ。

(4) 3 辺の長さが $x+2\,,\,3x+1\,,\,4-x^2$ である三角形ができるような x の値の範囲を求めよ。

[*25] (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < P \leqq \sqrt{3}$ (2) $0 < Q \leqq \dfrac{3}{4}$

[*26] 略

[*27] (1) $2 < x < 8$ (2) $\dfrac{-1-\sqrt{33}}{2} < x < -2\,,\ 1 < x < \dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}$ (3) $x > 1$ (4) $-2+\sqrt{5} < x < -1+\sqrt{6}$

2.9　正弦定理

$\triangle$ABC において BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$, 外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成り立つ。なお、この式から

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

であることもわかる。

問題 2.9.1 [*28]

(1) $\triangle$ABC において、BC $= 3$, $\angle B = 75^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ とする。このとき辺 AB の長さと、外接円の半径 R を求めよ。

(2) $\triangle$ABC において、BC $= 2\sqrt{3}$, $\angle B = 30^\circ$ とする。さらに外接円の半径が $R = 2$ であるとき、$\angle A$, $\angle C$ の大きさ、および 2 辺 AB , AC の長さをそれぞれ求めよ。

(3) $\triangle$ABC において、$\dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{2}{\sin B} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}$ が成り立つとき、$\triangle$ABC はどのような三角形か。

2.10　余弦定理

3 辺の長さが x , y , z の三角形において、長さ x , y の 2 辺のなす角を θ とするとき

$$\cos\theta = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} \quad , \quad z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$$

が成り立つ。

問題 2.10.1 [*29]

　$\triangle$ABC について以下の問いに答えよ。

(1) $\angle A = \dfrac{\pi}{3}$, AB $= 5$, AC $= 4$ のとき、辺 BC の長さを求めよ。

(2) AB $= 3$, BC $= \sqrt{19}$, CA $= 2$ のとき $\angle A$ の大きさを求めよ。

問題 2.10.2 [*30]

　OA $= a$, OB $= b$, AB $= c$ である $\triangle$OAB について $\angle$AOB が鋭角・直角・鈍角であるための a , b , c についての条件を以下の 2 通りの方法で求めよ。

(i) 余弦定理から。

(ii) xy 平面で O$(0\,,\,0)$, A$(a\,,\,0)$ として、点 B から x 軸への垂線の足 H の座標を考える。

[*28] (1) 順に $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$ 　(2) $(\angle A\,,\,\angle C\,,\,\mathrm{AB}\,,\,\mathrm{AC}) = (60^\circ\,,\,90^\circ\,,\,4\,,\,2)$, $(120^\circ\,,\,30^\circ\,,\,2\,,\,2)$
(3) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ である直角三角形

[*29] (1) $\sqrt{21}$ (2) $\dfrac{2\pi}{3}$

[*30] 条件は順に $a^2 + b^2 > c^2$, $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 + b^2 < c^2$ 　(ii)の hint : B$(x\,,\,y)$ として x を a , b , c で表す。

2.11　中線定理

$\triangle$ABC において、辺 BC の中点を M とするとき

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)$$

が成り立つ。

問題 2.11.1 [*31]

$\triangle$ABC において、辺 BC の中点を M とする。

(1) $\mathrm{AB}=7\,,\ \mathrm{BC}=8\,,\ \mathrm{CA}=5$ であるとき、中線 AM の長さを求めよ。

(2) $\mathrm{AB}=8\,,\ \mathrm{AM}=4\,,\ \mathrm{BM}=5$ であるとき、辺 AC の長さを求めよ。

問題 2.11.2 [*32]

点 O を中心とする半径 6 の円の中に一辺の長さが 2 の正方形 ABCD があって、対角線の交点を P とすると $\mathrm{OP}=2$ である。このとき $\angle$OPA の大きさによらず $\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2+\mathrm{OD}^2$ は一定であることを示せ。また、その一定値を答えよ。

2.12　三角形の面積

$\triangle$ABC の面積を S とする。

(1) $S=$ 底辺 $\times$ 高さ $\times\dfrac{1}{2}$

(2) 3 辺のうちの 2 辺の長さを $x\,,\ y$ その 2 辺のなす角を θ として

$$S=\frac{1}{2}xy\sin\theta$$

(3) $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a\,,\,b)\,,\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c\,,\,d)$ であるとき $S=\dfrac{1}{2}|ad-bc|$

[*31] (1) $\sqrt{21}$　(2) $\sqrt{18}$

[*32] 証明は略 , 一定値は 24

問題 2.12.1 [*33]

(1) $\mathrm{AB}=5\,,\,\mathrm{AC}=4\,,\,\angle A=\dfrac{\pi}{4}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

(2) $\mathrm{AB}=6\,,\,\mathrm{BC}=7\,,\,\mathrm{CA}=5$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。また各頂点から対辺に下ろした 3 本の垂線の長さの和を求めよ。

(3) $|\overrightarrow{a}|=3\,,\,|\overrightarrow{b}|=4\,,\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=8$ であるとき、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる三角形の面積を求めよ。

(4) $\overrightarrow{a}=(1\,,-2\,,5)\,,\,\overrightarrow{b}=(3\,,4\,,-6)$ であるとき、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる三角形の面積を求めよ。

(5) xyz 空間で、$\mathrm{A}(0\,,2\,,-1)\,,\,\mathrm{B}(-1\,,4\,,5)\,,\,\mathrm{C}(3\,,-7\,,4)$ とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

(6) xy 平面で、$\mathrm{A}(2\,,1)\,,\,\mathrm{B}(-1\,,5)\,,\,\mathrm{C}(5\,,3)$ とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

2.13　対角線と凸四角形の面積

凸四角形の 2 本の対角線の長さを $x\,,\,y$ とし、なす角を θ とする。このとき四角形の面積 S について

$$S=\frac{1}{2}xy\sin\theta$$

が成り立つ。

問題 2.13.1 [*34]

(1) 2 本の対角線の長さが $4\,,\,5$ で、なす角が $\dfrac{\pi}{4}$ である四角形の面積を求めよ。

(2) 2 本の対角線の長さが $3\,,\,8$ で、面積が 6 である四角形の対角線のなす角を求めよ。

(3) 2 本の対角線のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ で面積が $\sqrt{3}$ の四角形において、対角線の長さの和の最小値を求めよ。

[*33] (1) $5\sqrt{2}$　(2) 順に $6\sqrt{6}\,,\,\dfrac{214}{35}\sqrt{6}$　(3) $\sqrt{20}$　(4) $\dfrac{\sqrt{605}}{2}$　(5) $\dfrac{\sqrt{4634}}{2}$　(6) 9

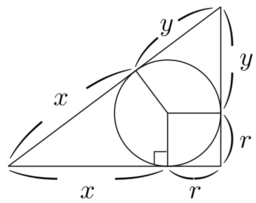
[*34] (1) $5\sqrt{2}$　(2) $\dfrac{\pi}{6}$　(3) 4

2.14　内接円の半径

（内接円の半径）

(i) 直角三角形については線分の長さに注目する。

（右図→）



(ii) 一般には面積との関係を考える。

△ABC の面積を S、内接円の半径を r とするとき

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

が成り立つ。

（内接球の半径）

四面体 ABCD の内接球の中心を O、半径を r として、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}V_{\mathrm{ABCD}}&=V_{\mathrm{OABC}}+V_{\mathrm{OABD}}+V_{\mathrm{OACD}}+V_{\mathrm{OBCD}}\\&=\frac{1}{3}(S_{\mathrm{ABC}}+S_{\mathrm{ABD}}+S_{\mathrm{ACD}}+S_{\mathrm{BCD}})r\end{aligned}$$

注）V , S はそれぞれ体積と面積である。

問題 2.14.1 [*35]

(1) 斜辺の長さが a で、他の二辺の長さが b, c である直角三角形の内接円の半径を r とすると $r=\dfrac{b+c-a}{2}$ であることを示せ。

(2) 3 辺の長さが 3 , 4 , 5 である三角形の内接円の半径を求めよ。

(3) 3 辺の長さが 4 , 5 , 6 である三角形の内接円の半径を求めよ。

問題 2.14.2 [*36]

(1) 辺の長さが a である正四面体の内接球の半径を求めよ。

(2) 四面体 OABC について OA $=$ OB $=4$, OC $=3$, AC $=$ BC $=5$, $\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{3}{8}$ であるとする。この四面体の内接球の半径を求めよ。

---

*35 (1) 略　(2) 1　(3) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

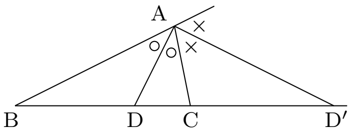
*36 (1) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$　(2) $\dfrac{3\sqrt{55}}{22+\sqrt{55}}$

2.15　角の二等分線と三角形

　△ABC において内角 A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき線分比について

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BD}:\mathrm{CD}\ \cdots(\diamondsuit)$$

が成り立つ。また外角 A の二等分線と直線 BC は AB $\fallingdotseq$ AC のとき交わるが、この交点を D′ として



$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BD'}:\mathrm{CD'}$$

である。三角比の問題を解く上ではこの性質を使えることが重要である。なおこれとは関係ないが長さ AD の求め方として面積を利用する方法は定番である。(↔問題 2.15.2 参照)

　角の二等分線は他にも、ベクトル、図形と方程式などの問題として取り上げられるのでそれについてもここで触れておく。

　内分公式を用いると (◇) より、辺の長さを $\mathrm{AB}=c$, $\mathrm{AC}=b$ として

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である。また単位ベクトルが菱形をつくることから $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{|\mathrm{AB}|}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{|\mathrm{AC}|}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ \cdots(*)$ は直線 AD の方向ベクトルになる。角の二等分線と平行なベクトルのつくり方としては、これも覚えておきたい。

① 線分比を用いる　　② 単位ベクトルで菱形をつくり $(*)$ のような式を立てる

のどちらかを使うことが多いが、他には「2 直線から等距離にある点の軌跡が角の二等分線」であるので

③ 点と直線の距離公式を用いる

という方法もある。

問題 2.15.1 [*37]

(1) △ABC において内角 A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=6$, $\mathrm{CA}=3$ であるとき、$\cos\angle\mathrm{ABC}$ の値と、線分 AD の長さを求めよ。

(2) △ABC の内心を I とし、直線 AI と辺 BC との交点を D とする。$\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とするとき、内分比 AI : ID を求めよ。

(3) △ABC において内角 A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。$\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{AC}=2$, $\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$ であるとき、線分 AD の長さを求めよ。

(余弦定理の利用、面積利用、ベクトルの内積利用、の 3 通りの方法がある。)

問題 2.15.2 [*38]

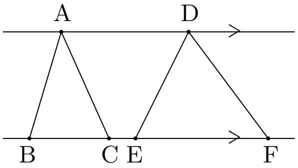
　△ABC において ∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とする。また $\mathrm{AB}=x$, $\mathrm{AC}=y$, $\mathrm{AD}=z$, $\angle\mathrm{BAD}=\theta$ とする。三角形の面積の関係 $\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}$ を用いて z を x, y, θ で表せ。

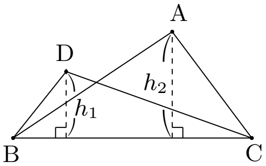
[*37] (1) 順に $\dfrac{7}{8}$, $\sqrt{10}$　(2) $(b+c):a$　(3) $\dfrac{4}{3}$

[*38] $z=\dfrac{2xy\cos\theta}{x+y}$

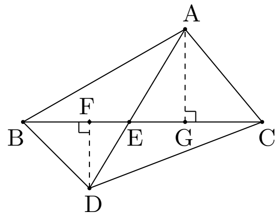
2.16　線分比と面積比（体積比）

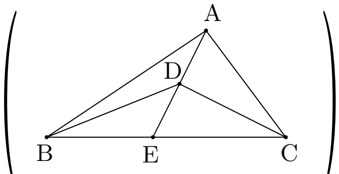
面積比や体積比を線分比から考えさせる問題は出題率も高く、解けるようにしておきたい。いくつかの頻出パターンをまとめておく。(図形に共通項があることが重要である。)

①


②


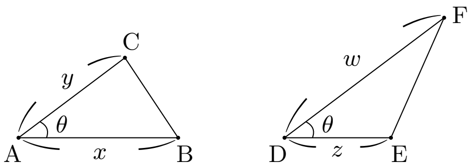
①においては 2 つの三角形の高さが同じなので $\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DEF} = \mathrm{BC} : \mathrm{EF}$ である。また②においては底辺の長さが同じなので $\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DBC} = h_1 : h_2$ である。

③




これでも同じ。

③は本質的に②と同じである。すなわち底辺が共有されていて、高さの比が面積比になる。上図において $\triangle\mathrm{AEG} \backsim \triangle\mathrm{DEF}$ であり $\mathrm{AG} : \mathrm{DF} = \mathrm{AE} : \mathrm{DE}$ である。これと②から $\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DBC} = \mathrm{AE} : \mathrm{DE}$ となることがわかる。

④


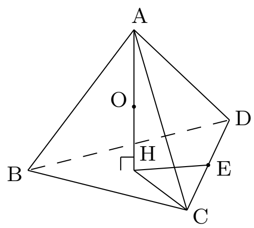
$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}xy\sin\theta$$

$$\triangle\mathrm{DEF} = \frac{1}{2}zw\sin\theta$$

④は内角の一つが同じ場合である。面積は上のとおりで $\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DEF} = xy : zw$ である。また特に $\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DEF} = 1 : \dfrac{zw}{xy}$ であり $\triangle\mathrm{DEF} = \triangle\mathrm{ABC} \times \dfrac{z}{x} \times \dfrac{w}{y}$ がわかる。

⑤ 2 つの平面図形が相似で相似比が $a : b$ ならば、面積比は $a^2 : b^2$ である。また 2 つの空間図形が相似で相似比が $a : b$ ならば、体積比は $a^3 : b^3$ である。(なお表面積の比は $a^2 : b^2$)

⑥ 右図において四面体 ABCD , OBCD は底面を共有しているので高さの比 $\mathrm{AH} : \mathrm{OH}$ が体積比になる。また四面体 OBCD , OCEH は高さ OH を共有するので底面の面積比 $\triangle\mathrm{BCD} : \triangle\mathrm{CEH}$ が体積比になる。



問題 2.16.1 [*39]

三角形 ABC において辺 BC を 5 : 2 に内分する点を D とし、線分 AD を 2 : 3 に内分する点を E とする。

(1) 面積比 △ABC : △BCE, △ABC : △CDE をそれぞれ求めよ。

(2) △CDE の面積を $2S$ とするとき △BDE の面積を S で表せ。

(3) さらに △ABE, △ACE の面積を S で表せ。

(4) 面積比 △ABE : △BCE : △CAE を求めよ。

問題 2.16.2 [*40]

平行四辺形 ABCD において辺 CD を 2 : 1 に内分する点を E とし、辺 AD の中点を F とする。さらに対角線 AC と線分 BE, BF との交点をそれぞれ G, H とする。

(1) 面積比 △ABG : △CEG を求めよ。

(2) 面積比 △BCH : △CEH, △FGH : △AFG をそれぞれ求めよ。

(3) 面積比 △AFH : △ACD を求めよ。

(4) 三角形 ABC の面積を S として五角形 DFHGE の面積を S で表せ。

問題 2.16.3 [*41]

四面体 OABC において底面 ABC の重心を G とし、線分 OG を 1 : 2 に内分する点を E とする。また直線 AG と線分 BC の交点を D とする。四面体 OABC の体積を V として四面体 EABC, EGCD の体積をそれぞれ V で表せ。

問題 2.16.4 [*42]

(1) 2 つの球 A, B の体積の比は 64 : 125 であるという。このとき A, B の半径の比と表面積の比をそれぞれ求めよ。

(2) 正五角形の 5 本の対角線の囲む図形はやはり正五角形である。この事実を用いて、対角線の囲む正五角形の面積が元の正五角形の面積の何倍であるかを求めよ。(→問題 2.5.2 参照)

[*39] (1) 順に 5 : 3 , 35 : 6　(2) $5S$　(3) 順に $\dfrac{10}{3}S$, $\dfrac{4}{3}S$　(4) 10 : 21 : 4

[*40] (1) $3^2 : 2^2$　(2) 順に 3 : 2 , 4 : 9　(3) 1 : 6　(4) $\dfrac{17}{30}S$

[*41] 順に $\dfrac{2}{3}V$, $\dfrac{1}{9}V$

[*42] (1) 順に 4 : 5 , 16 : 25　(2) $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$ 倍

2.17　接弦定理

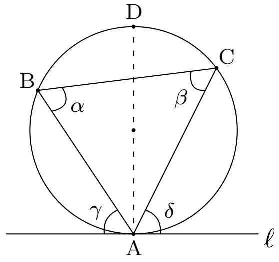
（接弦定理）

右図で ℓ は点 A における円の接線である。このとき

$$\alpha = \delta\ ,\ \beta = \gamma$$

であって、これを接弦定理という。

証明は簡単で、点 B（または C）を点 D にもってゆくだけである。（右図のような場合、さらには 2 点 B , C が直径 AD に関して同じ側にあるときのそれぞれを考えてみよ。）



また、どの二つの角が等しいかは、円上で点 B（C）を点 A に近づけたときの $\angle$CBA（$\angle$BCA）の極限を考えると直感的である。

なお「接弦定理」は、直線の一つが接線である場合の「方べきの定理」の証明で重要になる。

問題 2.17.1 *43

(1) 円上に 3 点 A , B , C があって $\triangle$ABC において $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$ である。直線 AB と点 C における円の接線との交点を P とするとき $\angle$BCP を求めよ。また方べきの定理 $\mathrm{CP}^2 = \mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ を示せ。

(2) 点 O を中心とする円上に 3 点 A , B , C があって $\angle\mathrm{AOB} = 120^\circ$ である。またそれぞれ点 B , A を通らないように弧 AC , BC をとると $\overset{\frown}{\mathrm{AC}} : \overset{\frown}{\mathrm{BC}} = 4 : 11$ である。直線 BC と点 A における円の接線との交点を P とし、また点 A に関して点 P と対称な点を Q とするとき $\angle$CAP と $\angle$BAQ を求めよ。

問題 2.17.2 *44

$\triangle$PQR の外接円を C_1 とする。また点 P において円 C_1 に内接し、かつ辺 QR に接する円を C_2 とし、円 C_2 と辺 PQ , PR との交点をそれぞれ S , T とする。さらに円 C_2 と辺 QR との接点を U とする。

(1) ST // QR を示せ。

(2) SU = UT を示せ。

(3) $\angle\mathrm{QPU} = \angle\mathrm{RPU}$ を示せ。

*43　(1) $\angle\mathrm{BCP} = 50^\circ$ で、後半は $\triangle\mathrm{PBC} \backsim \triangle\mathrm{PCA}$ より。
(2) $\angle C = 60^\circ$ ならば $\angle\mathrm{CAP} = 32^\circ$, $\angle\mathrm{BAQ} = 60^\circ$ で、$\angle C = 120^\circ$ ならば $\angle\mathrm{CAP} = 16^\circ$, $\angle\mathrm{BAQ} = 120^\circ$

*44　(1) P における接線上で直線 PU に関して Q と同じ側に点 V をとって接弦定理より $\angle\mathrm{VPQ} = \angle\mathrm{PTS} = \angle\mathrm{PRQ}$
(2) 接弦定理から $\angle\mathrm{STU} = \angle\mathrm{SUQ}$ で、さらに(1)より。　(3) 略

2.18　円に内接する四角形の性質

円に内接する四角形の持つ性質は、円周角・中心角など円についての初等幾何的知識により確かめられる。したがって幾何学の基本定理をきちんと使えるようになっていることは、ここでの大前提である。

① 対する内角の大きさを α, β とするとき

$$\alpha+\beta=\pi$$

である。また特にこの α, β について

$$\sin\alpha=\sin\beta \ \ , \ \ \cos\alpha+\cos\beta=0$$

である。なお逆に「$\alpha+\beta=\pi$ または $\cos\alpha+\cos\beta=0$」である四角形は、ある円に内接する。

② 円に内接する四角形の頂点を順に A , B , C , D とし、また対角線の交点を P とする。円周角が等しいなどの性質を用いて $\triangle\mathrm{ABP} \backsim \triangle\mathrm{DCP}$, $\triangle\mathrm{ADP} \backsim \triangle\mathrm{BCP}$ であることがわかる。この相似比を利用して P までの線分の長さを求めることは、三角比以前の問題である。またこの性質を別の形で表したものが、次節「方べきの定理」の①である。

補）円に外接する四角形 ABCD について $\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$ である。内接四角形についてだけでなく、外接する場合の「対する辺の長さの和は等しい」という性質も覚えておきたい。なおこの逆も成り立つが、証明はかなり難しい。

問題 2.18.1 [*45]

(1) 円に内接する四角形 ABCD において、$\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$, $\angle\mathrm{BCD}=80^\circ$ とする。このとき、$\angle\mathrm{CDA}$, $\angle\mathrm{DAB}$ の大きさをそれぞれ求めよ。さらに円の中心を O として $\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ であるとき、$\angle\mathrm{CAD}$, $\angle\mathrm{BDA}$ の大きさをそれぞれ求めよ。

(2) ある円に内接する四角形 ABCD があって $\angle A$ は鋭角かつ $\mathrm{AB}=\mathrm{AD}$ である。また $\angle\mathrm{BDC}=15^\circ$ であり、点 C における円の接線と直線 CD のなす鋭角は 25° である。四角形の 4 つの内角をそれぞれ求めよ。

問題 2.18.2 [*46]

四角形 ABCD はある円に外接し $\mathrm{AD}=2$, $\mathrm{BC}=4$, $\cos A=\dfrac{1}{4}$ である。

(1) $\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{BC}+\mathrm{DA}$ であることを示せ。

(2) さらに四角形 ABCD がある円に内接するとき 2 辺の長さ AB , CD と、対角線の長さ BD を求めよ。

[*45] (1) 順に 60° , 100° , 70° , 30°　(2) $\angle A=40^\circ, \angle B=95^\circ, \angle C=140^\circ, \angle D=85^\circ$

[*46] (1) 略　(2) 順に $\dfrac{60}{13}$, $\dfrac{18}{13}$, $\dfrac{2}{13}\sqrt{874}$

問題 2.18.3 [*47]

円に内接する四角形 ABCD において $\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{BC}=2$, $\mathrm{CD}=3$, $\mathrm{DA}=4$ とする。

(1) 対角線 BD の長さ、および $\cos A$ の値を求めよ。

(2) 外接円の半径 R と四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

(3) 対角線の交点を P とし、さらに線分 AP の長さを x とおく。三角形の相似比を用いて、線分 BP, CP, DP の長さをそれぞれ x で表せ。

問題 2.18.4 [*48]

円に内接する四角形 ABCD について $\mathrm{AB}=a$, $\mathrm{BC}=b$, $\mathrm{CD}=c$, $\mathrm{DA}=d$, $\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とする。

(1) $a^2+b^2-(c^2+d^2)$ を a, b, c, d および θ で表せ。

(2) θ が鋭角・直角・鈍角であるための a, b, c, d についての条件をそれぞれいえ。

(3) $a=\sqrt{6}$, $b=2$, $c=\sqrt{7}$, $d=\sqrt{3}$ のとき各内角は鋭角・直角・鈍角のいずれであるか。

問題 2.18.5 [*49]

円に内接する四角形 ABCD があって $\angle A+\angle D>180^\circ$, $\angle C+\angle D>180^\circ$ である。2 直線 AB, CD の交点を E とし、また 2 直線 AD, BC の交点を F として以下の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{DEF}<180^\circ-\angle A$ を示せ。

(2) 接弦定理および(1)より $\triangle\mathrm{AED}$ の外接円と線分 EF は 2 点を共有することがわかる。この共有点のうち E でないものを点 G として、4 点 C, D, F, G は同一円周上にあることを示せ。

[*47] (1) 順に $\sqrt{\dfrac{77}{5}}$, $\dfrac{1}{5}$　(2) 順に $\dfrac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$, $2\sqrt{6}$　(3) 順に $\dfrac{1}{2}x$, $\dfrac{3}{2}x$, $3x$

[*48] (1) $2(ab+cd)\cos\theta$　(2) 順に $a^2+b^2>c^2+d^2$, $a^2+b^2=c^2+d^2$, $a^2+b^2<c^2+d^2$
(3) $\angle A$ は鈍角 , $\angle B$ と $\angle D$ は直角 , $\angle C$ は鋭角

[*49] (1) 略　(2) $\angle\mathrm{DCF}+\angle\mathrm{DGF}=180^\circ$ より。

2.19　方べきの定理

円とそれぞれ共有点をもつ、平行でない 2 直線があるとき、線分の長さの積について以下の関係式が成り立つが、これらを併せて「方べきの定理」という。

① 2 直線が円の内部で交わるとき。

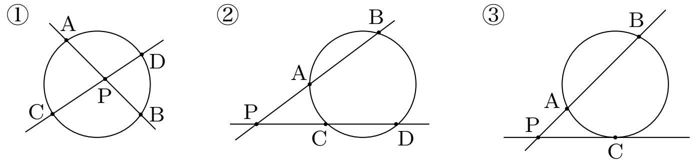
　　$\to \mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \times \mathrm{PD}$

② 直線と円は 2 点で交わり、2 直線の交点は円の外部にあるとき。

　　$\to \mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \times \mathrm{PD}$

③ 直線のうち一方は円と接してもう一方は 2 点で交わるとき。

　　$\to \mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PC}^2$



注）前節でも触れたが、いずれも三角形の相似から得られる結果である。すなわち①②では $\triangle\mathrm{PAC} \backsim \triangle\mathrm{PDB}$ であり $\dfrac{\mathrm{PD}}{\mathrm{PA}} = \dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{CP}}$ が、また③では $\triangle\mathrm{PAC} \backsim \triangle\mathrm{PCB}$ であり $\dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PA}} = \dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{CP}}$ が成り立つが、この一部を考えたものが「方べきの定理」に他ならない。（②では $\triangle\mathrm{PAD} \backsim \triangle\mathrm{PCB}$ であって $\dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PA}} = \dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{DP}}$ も成り立つ。）なお①②の AC , BD あるいは③の AC , BC などが関係する場合には方べきの定理だけでは処理できないので、この比例式を考えることになる。

問題 2.19.1 [*50]

(1) ②の図において $\mathrm{PA} = 3$, $\mathrm{AB} = 5$, $\mathrm{PC} = 4$ とする。長さ CD を求めよ。

(2) ①の図において $\mathrm{PA} = 6$, $\mathrm{PB} = 8$, $\mathrm{CD} = 18$, $\mathrm{PC} > \mathrm{PD}$ であるとする。このとき長さ PC , PD を求めよ。

(3) xy 平面で、原点を中心とする半径 2 の円と点 $\mathrm{P}(-5, 2)$ を通る直線とが、異なる 2 点 A , B を共有している。直線の傾きによらず線分の長さの積 $\mathrm{PA} \times \mathrm{PB}$ は一定であることを示せ。またその値を求めよ。

問題 2.19.2 [*51]

(1) 半径 2 の円周上に 3 点 A , B , C があり、線分 AB は直径で $\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ である。さらに線分 AB を $1:3$ に内分する点を P とし、直線 CP と円の交点のうち C でないものを D とする。

(i) 線分の長さ CP , DP , AD を求めよ。

(ii) さらに 2 直線 AD , BC の交点を Q として、長さ AQ , CQ を求めよ。

(2) $\mathrm{AC} < \mathrm{BC}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ があって、点 C を接点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の接線と直線 AB

[*50] (1) 2　(2) 順に $9 + \sqrt{33}$, $9 - \sqrt{33}$　(3) 証明は略 , 一定値は 25

[*51] (1) (i) 余弦定理から $\mathrm{CP} = \sqrt{7}$, 次に方べきの定理から $\mathrm{DP} = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$, さらに相似比を考えて $\mathrm{AD} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$

(ii) $\mathrm{AQ} = 4\sqrt{7}$, $\mathrm{CQ} = 10$　$\left(\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}} = \dfrac{\mathrm{QD}}{\mathrm{QB}} = \dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BA}}\ \text{より。}\right)$　(2) 順に 6 , 6（BC は比例式から。）

との交点を D とすると $\mathrm{AC}=3$, $\mathrm{AD}=2$, $\mathrm{CD}=4$ である。このとき辺 AB, BC の長さをそれぞれ求めよ。

問題 2.19.3 [*52]

(1) 円に内接する四角形 ABCD について $\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{BC}=5$, $\mathrm{CD}=3$, $\mathrm{DA}=4$ とする。2 直線 AB, CD の交点を E とするとき長さ BE, CE を求めよ。

(2) 線分 AB を直径とする円周上に点 C があって $\mathrm{AC}=\sqrt{3}$ かつ $\mathrm{AC}<\mathrm{BC}$ である。さらに点 C における円の接線と直線 AB の交点を D とすると $\mathrm{CD}=3\sqrt{2}$ である。このとき、長さ AB, BC, AD を求めよ。

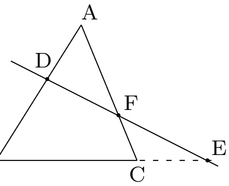
[*52] (1) 順に $\dfrac{85}{9}$, $\dfrac{95}{9}$　　(2) 順に 3 , $\sqrt{6}$, 3

2.20 メネラウスの定理・チェバの定理

(メネラウスの定理)

右図において $\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AD}}\cdot\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BE}}\cdot\dfrac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CF}}=1\ \cdots(*)$ である。

なお逆に辺 AB , AC の内分点 D , F および辺 BC の外分点 E について $(*)$ が成り立つとき、3 点 D , E , F は同一直線上にある。

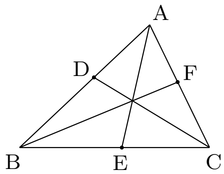


注）証明は各線分比が △AFE , △BFE , △CFE の面積比で表されることより。また逆については同一法で。

(チェバの定理)

右図において $\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AD}}\cdot\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BE}}\cdot\dfrac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CF}}=1\ \cdots(\diamondsuit)$ である。

なお逆に辺 AB , BC , CA の内分点 D , E , F について $(\diamondsuit)$ が成り立つとき、3 本の線分 AE , BF , CD は同一点で交わる。



注）証明は 3 つの線分の交点を O として各線分比が △OAB , △OBC , △OCA の面積比で表されることより。また逆についてはやはり同一法で。

問題 2.20.1 [*53]

△ABC において辺 AB を 5 : 4 に内分する点を D とし、辺 AC を 3 : 2 に内分する点を E とする。さらに辺 BC 上にある点 F に対して 3 本の線分 AF , BE , CD は点 G で交わるとする。

(1) BF : FC を求めよ。

(2) AG : GF , BG : GE , CG : GD をそれぞれ求めよ。

問題 2.20.2 [*54]

△ABC において辺 AB , BC , CA 上にそれぞれ内分点 D , E , F がある。3 本の線分 AE , BF , CD は三角形の内部の点 G で交わり BG : GF = 4 : 3 , CG : GD = 7 : 5 である。

AD : DB $= x : y$, BE : EC $= a : b$, AF : FC $= z : w$ として以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{w}{z}$ をそれぞれ a , b で表せ。

(2) $a : b$ を求めよ。

[*53] (1) 6 : 5 (2) 順に 11 : 4 , 2 : 1 , 3 : 2

[*54] (1) 順に $\dfrac{7a}{5b}-1$, $\dfrac{4b}{3a}-1$ (2) 35 : 36

問題 2.20.3 [*55]（メネラウスの定理の別証）

△ABC において辺 AB を $a:b$ に内分する点を D とし、辺 AC を $c:d$ に内分する点を E とする。さらに 2 つの線分 BE, CD の交点を F とし、点 D を通って辺 AC に平行な直線と直線 BE との交点を G とする。

(1) 線分 DG の長さを bt として長さ AE, EC を求めよ。

(2) 長さの比 CF : FD を求めよ。

(3) $\dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{CE}} \cdot \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} \cdot \dfrac{\mathrm{FC}}{\mathrm{DF}}$ の値を求めよ。

問題 2.20.4 [*56]（チェバの定理の別証）

△ABC において辺 AB, BC, CA 上にそれぞれ内分点 D, E, F があって

$$\mathrm{AD}:\mathrm{DB} = a:b,\ \mathrm{BE}:\mathrm{EC} = c:d,\ \mathrm{CF}:\mathrm{FA} = e:f$$

である。また 3 本の線分 AE, BF, CD は △ABC の内部の点 G で交わっているとする。

(1) △ABE と直線 CD にメネラウスの定理を用いて EG : GA を求めよ。

(2) △ACE と直線 BF にメネラウスの定理を用いて EG : GA を求めよ。

(3) (1)(2)の結果を用いて $\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{d}{c} \cdot \dfrac{f}{e} = 1$ を示せ。

問題 2.20.5 [*57]

円に内接する四角形 ABCD において 2 つの対角線の交点を E とすると BE : ED = 3 : 4 である。また辺 BC を 5 : 6 に内分する点を G とし、2 つの線分 AC, GD の交点を F とする。

(1) EF : FC を求めよ。

(2) さらに直線 GE と辺 AD との交点を H とすると AH : HD = 3 : 2 である。AE : EF : FC を求めよ。

問題 2.20.6 [*58]

△ABC において辺 BC を三等分する点を B に近い側から D, E とする。また辺 AB を 3 : 1 に内分する点を F とし、辺 CA の中点を G とする。さらに線分 FG と線分 AD, AE との交点をそれぞれ H, I として以下の問いに答えよ。

(1) AI : IE を求めよ。

(2) △AHI の面積は △ABC の面積の何倍か。

問題 2.20.7 [*59]

(1) △ABC の内接円と辺 AB, BC, CA との接点をそれぞれ D, E, F とする。3 本の線分 AE, BF, CD は一点で交わることを示せ。

(2) 2 辺 AD, BC が平行な台形 ABCD があって AD = 2, BC = 3 である。辺 BC の三等分点を B に近い側から E, F とし、辺 CD の中点を G とする。さらに 2 つの線分 AE, BD の交点を H とし、2 つの線分 AF, EG の交点を I とするとき、3 点 C, H, I は同一直線上にあることを示せ。

---

*55 (1) 順に $(a+b)t$, $(a+b)t \times \dfrac{d}{c}$ (2) $(a+b)d:bc$ (3) 1

*56 (1) $bd:a(c+d)$ (2) $ce:(c+d)f$ (3) 略

*57 (1) 10 : 21 (2) 155 : 30 : 63

*58 (1) 9 : 7 (2) $\dfrac{27}{224}$ 倍

*59 略