高校数学 Web 問題集

– basic 1 –

(利用上の注意点)

この問題集のほとんどはオリジナルに作成されたものです。個人が自らの学習のためにこのファイルを利用することは構いませんが、商用利用および著作権の所在が不明瞭になるような形での二次配布については、固くその行為を禁止致します。特に説明部分の記述についての著作権は当サイト「ky の書架」に帰属しますので御注意下さい。なお高校の授業等での利用を希望される方は問い合わせフォーム(TOP ページにアクセスすると“問い合わせ” のメニューがあります)にて御連絡下さい。

また間違い等(おそらくたくさんあります)を発見された場合にも御連絡いただけると助かります。

最終更新日 2010.7/7

web サイト「ky の書架」にはこれ以外にも「ウィルソンの定理の初等的証明」・「大学入試の整数問題」などのファイルがあります。興味のある方は url(http://kynoshoka.com/)を直接入力するか、サイト名で google または yahoo 検索してアクセスして下さい。

1　数と式

1.1　有理数と無理数および相等条件

　実数のうち、整数の比で表される数を有理数という。また整数の比で表されない数を無理数という。

① a, b, c, d は有理数で x は無理数とする。このとき以下の同値関係が成り立つ。

　　「$a+bx=c+dx \iff a=c$ かつ $b=d$」

　注）0 は $0+0x$ であり「$a+bx=0 \iff a=b=0$」である。

　以下の ② ～ ④ の同値関係は ① の証明と全く同じ方法で確認できる。

② 複素数の相等

　a, b, c, d は実数で i は虚数単位とする。このとき

　　「$a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$」

　一般には a, b, c, d は実数で z は虚数として

　　「$a+bz=c+dz \iff a=c$ かつ $b=d$」

③ ベクトルの線形結合の一意性

　どちらも $\overrightarrow{0}$ でない $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行でない (1 次独立である) とき

　　「$x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}=z\overrightarrow{a}+w\overrightarrow{b} \iff x=z$ かつ $y=w$」

④ A, B は行列とする。どのような k に対しても $A \fallingdotseq kB$ であるとき

　　「$xA+yB=zA+wB \iff x=z$ かつ $y=w$」

　注）B が単位行列 E である場合の利用頻度が高い。

問題 1.1.1 [*1]

(1) $\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法で示せ。

(2) 基本事項①の同値関係を証明せよ。

問題 1.1.2 [*2]

(1) $a+\sqrt{2}=3-b\sqrt{2}$ を満たす有理数 a, b を求めよ。

(2) $(a-\sqrt{3})^2=b(2+\sqrt{3})$ となるような有理数 a, b を求めよ。

(3) $1+\sqrt{2}$ が x の方程式 $ax^2-bx+b+c-7=0$ の解となるような正の整数の組 (a, b, c) を求めよ。

(4) a は有理数とする。x の方程式 $(a+\sqrt{5})x^2-(2a-\sqrt{5})x+1-6\sqrt{5}=0$ が有理数の解をもつような a の値と、そのときの有理数解を求めよ。

[*1] 略

[*2] (1) $a=3$, $b=-1$　(2) $(a, b)=(-1, 2)$, $(-3, 6)$　(3) $(a, b, c)=(1, 2, 4)$, $(2, 4, 1)$
(4) $a=-\dfrac{1}{15}$, $x=-3$

問題 1.1.3 [*3]

　i は虚数単位として以下の問いに答えよ。

(1) $2a-1+3i=5+(b+4)i$ を満たす実数 a, b を求めよ。

(2) $(a+bi)^2=-3+4i$ を満たす実数 a, b を求めよ。

(3) x についての方程式 $(1+i)x^2-(2-ai)x-3+i=0$ が実数解を持つような実数 a の値と、そのときの実数解を求めよ。

(4) a, b, c, p, q は実数とする。$p+qi$ が x の方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解であるとき $p-qi$ も解であることを示せ。

問題 1.1.4 [*4]

　$\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平行でないとして、以下の問いに答えよ。

(1) $x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるとき x, y を求めよ。

(2) $x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{0}$ となる x, y を求めよ。

問題 1.1.5 [*5]

　$\triangle$OAB において辺 OB, AB の中点をそれぞれ C, D とする。さらに線分 AC, OD の交点を G とする。

(1) $\mathrm{OG}:\mathrm{GD}=k:(1-k)$ として $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, k で表せ。

(2) $\mathrm{AG}:\mathrm{GC}=t:(1-t)$ として $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, t で表せ。

(3) k, t の値を求めよ。また $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

[*3] (1) $a=3$, $b=-1$　(2) $(a,b)=\pm(1,2)$　(3) $(a,x)=(2,-1)$, $\left(-\dfrac{10}{3},3\right)$　(4) 略

[*4] (1) $x=-2$, $y=3$　(2) $x=2$, $y=-2$

[*5] (1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{k}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(3) $k=t=\dfrac{2}{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

1.2　絶対値記号

① $|x|$ とは、「数直線 (複素数平面) 上での原点と x との距離」である。すなわち

$$|x| = \begin{cases} x \ (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x \ (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

注）x が実数のときは、マイナスをプラスにするという操作になる。

② 実数 a, b については $|a-b|$ とは、数直線上での a, b 間の距離である。すなわち a, b の位置関係を考えて

$$|a-b| = \begin{cases} a-b \ (a \geqq b \text{ のとき}) \\ b-a \ (a < b \text{ のとき}) \end{cases}$$

③ $y = \bigl|f(x)\bigr|$ のグラフは以下のようにして描ける。

ｉ) $y = f(x)$ のグラフを描く。

ⅱ) x 軸よりも下にある部分を、上に折り返す。

問題 1.2.1 *6

次の関数のグラフを描け。

(1) $y = |x-1|$　(2) $y = |x| + |x-2|$

(3) $y = |2x+1| + |-x+1| - |3x-6|$　(4) $y = |x^2 - x|$

(5) $y = x|2x-4|$　(6) $y = \bigl||x-1| - 1\bigr|$

問題 1.2.2 *7

方程式の解を求めよ。

(1) $|x| = 3$　(2) $|x-4| = \sqrt{2}$

(3) $|x+1| = |2x|$　(4) $|x+1| = 2x$

(5) $|x| + |x-2| = 6$　(6) $|x^2 - x| = 3x - 1$

問題 1.2.3 *8

x についての不等式を解け。

(1) $|x| \geqq 2$　(2) $|x| < a$（a は定数）

(3) $|x^2 + x| < 2$　(4) $|x| + |x-2| > -x + 3$

(5) $|x^2 - x| \leqq -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

問題 1.2.4 *9

(1) 方程式 $|x| + |y| = 1$ の表す曲線 C について以下の問いに答えよ。

(ア) C のうち $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ にある部分を描け。　(イ) 曲線 C を描け。

(2) 不等式 $|x| + |y| \leqq 1$ の表す領域を図示せよ。

---

*6 略

*7 (1) ± 3　(2) $4 \pm \sqrt{2}$　(3) $1, -\dfrac{1}{3}$　(4) 1　(5) $-2, 4$　(6) $-1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}$

*8 (1) $x \leqq -2, x \geqq 2$　(2) $a \leqq 0$ のとき解なし, $a > 0$ のとき $-a < x < a$　(3) $-2 < x < 1$
(4) $x < -1$, $x > 1$　(5) $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$, $x = 1$

*9 略

1.3 指数

指数についての基本をまとめておく。

① 演算法則

正の整数 n について n 個の a の積を a^n と定める。a の個数を考えることで以下の公式が得られる。

a_1) $a^m a^n = a^{m+n}$ a_2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ a_3) $(a^m)^n = a^{mn}$

ここで定義からすると a_2) は $m > n$ で意味を持つのであるが $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\cdots(*)$ と定めると、この制限は不要となり都合が良い。$(*)$は指数の整数範囲への拡張であり、$a_1) \sim a_3)$ はすべての整数 m, n においての指数法則となる。

② n 乗根と指数の有理数範囲への拡張

n 乗して a になる数を a の n 乗根という。またこのうち実数であるもの(複数あるときは負でない方)を $\sqrt[n]{a}$ とする。例えば -8 の 3 乗根は -2 , $1 \pm \sqrt{3}i$ であり $\sqrt[3]{-8} = -2$, また 4 の 2 乗根は ± 2 で $\sqrt{4} = 2$ である。ここで a_3) において形式的に $m = \dfrac{1}{n}$ とすると $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1$ となるので $a^{\frac{1}{n}}$ が a の n 乗根であると都合が良い。「$a > 0$, m は整数 , n は正の整数」において $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ と定める理由はこんなところにある。この定義により指数を有理数範囲に拡張すると $a_1) \sim a_3)$ と同様の法則が成り立つ。すなわち $a > 0$ で x, y は有理数として

a_4) $a^x a^y = a^{x+y}$ a_5) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ a_6) $(a^x)^y = a^{xy}$

である。さらに $b > 0$ として以下の関係式が有理数 x について成立する。

a_7) $(ab)^x = a^x b^x$

③ 指数の実数範囲への拡張と指数関数のグラフ

実数範囲まで拡張するためには数列の極限を持ち出さなければならず(例えば 3^π は 3^3 , $3^{3.1}$, $3^{3.14}$, $3^{3.141}$, $\cdots$ の極限として定める)、 高校数学の範囲では説明が難しい。$y = a^x$ のグラフを描くのに、有理数 x の定める各点から連続につないでゆけるように無理数乗を決める、というぐらいの直感的理解で仕方ないだろう。問題の解法では、そのような拡張の結果、有理数範囲までの演算法則がそのまま使えるということと、どのようなグラフになるのかということがわかっていれば十分である。

特に $y = a^x$ のグラフは $a > 1$ であるとき単調増加で $0 < a < 1$ であるとき単調減少である。1.5 でも触れるが、この性質は方程式・不等式を解く上で重要である。

問題 1.3.1 [*10]

(1) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} \div \sqrt[4]{a^{-10}}$ を簡単にせよ。

(2) a , b, x はいずれも正の数とする。$(a^{\frac{5}{2}} b^{-\frac{1}{3}})^4 \times (a^4 x^{\frac{2}{9}})^{-\frac{3}{8}} = (b^{\frac{1}{4}} x)^{\frac{2}{3}}$ であるとき x を a , b で表せ。

(3) $y = a^x$ のグラフを、位置関係に注意して $a = 2$, 3 , 4 , $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$ のそれぞれの場合について描け。

[*10] (1) a^3 (2) $a^{\frac{34}{3}} b^{-2}$ (3) 略

1.4　対数

(*Definition*)

$a>0$ かつ $a \fallingdotseq 1$, $X>0$ について X は a の何乗であるかを $\log_a X$ で表す。　□ ⧄

例えば 8 は 2 の 3 乗であり $\log_2 8 = 3$ で、また 1 は 4 の 0 乗であり $\log_4 1 = 0$ となる。この定義から以下のようなことがわかる。なお文字はすべて正の数で、底に現れるものはさらに 1 でないとする。

① 指数と対数の関係

「 $X = a^r \iff r = \log_a X$ 」

② 対数関数のグラフ

定義から $y = \log_a x$ とは $y = a^x$ のグラフ上にある点 P の y 座標 X に x 座標 Y を対応させる関数である。したがって $y = a^x$ のグラフまであわせて座標平面を原点中心に左回りに 90° 回転させ、その後左右を逆にすると、$y = \log_a x$ のグラフになる。あるいは $y = a^x$ と $y = \log_a x$ は互いに逆関数であり、2 つのグラフは直線 $y = x$ に関して線対称になるという性質を用いてもよい。

「$a > 1$ のとき単調増加で、$0 < a < 1$ のとき単調減少である」ことは特に重要である。

③ 対数の演算法則

a_1) $\log_a X + \log_a Y = \log_a XY$　　　a_2) $\log_a X - \log_a Y = \log_a \dfrac{X}{Y}$

↑　↑　↖

($X = a^r$ の r) ($Y = a^s$ の s) ($XY = a^{r+s}$ の $r+s$)

a_3) $r \log_a X = \log_a X^r$　　　a_4) $\log_x y = \dfrac{\log_a y}{\log_a x}$ (底の変換公式)

これ以外では　a_5) $a^{\log_a X} = X$　はしばしば問題にされ重要である。

④ 両辺の対数をとるという操作

$X = Y$ から $\log_a X = \log_a Y$ を考えることを「両辺の対数をとる」という。例えば①の $\Longrightarrow$ 向きの変形は、この操作を行うと簡単に実行される。$a^x = b^c$ の形の指数方程式の解はこの操作で求めるとよい。

問題 1.4.1 [*11]

(1) $\log_2 \sqrt[3]{15} - \log_2 \left(\dfrac{\sqrt[4]{2}}{10\sqrt{3}} \right) - \dfrac{4}{3} \log_8 125$ を簡単にせよ。

(2) $9\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_2 3}$ の値を求めよ。

(3) $2^x = 3^y = 6^z$ のとき $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ が成り立つことを示せ。

(4) 方程式 $16^x - 13 \cdot 4^x + 40 = 0$ の解を求めよ。

(5) $y = \log_a x$ のグラフを、位置関係に注意して $a = 2,\ 4,\ \dfrac{1}{2}$ のそれぞれについて描け。
また $y = \log_2 x^2$ のグラフを描け。

(6) 底の変換公式を証明せよ。

---

*11 (1) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6}\log_2 3$　(2) 1　(3) 略　(4) $\dfrac{3}{2}$, $\log_4 5$　(5) 略　(6) 略

1.5　数の大小比較

数の大小を調べる方法はいくつかある。

① 差を考える。$a-b$ を計算して

$$a-b>0 \text{ ならば } a>b\,,\quad a-b=0 \text{ ならば } a=b\,,\quad a-b<0 \text{ ならば } a<b$$

ここで以下の実数の基本性質は重要である。

i) $(実数)^2 \geqq 0$ で、特に 0 でない実数 x について $x^2>0$

ii) 同符号の数の積は正、異符号の数の積は負である。

② 関数の (狭義の) 単調性を利用する。$f(x)$ が (狭義の) 単調増加ならば

「 $f(a)<f(b) \iff a<b$ 」

という同値関係があるので $f(a)\,,\,f(b)$ の大小がわかれば $a\,,\,b$ の大小もわかることになる。例えば $f(x)=x^2$ の単調性を用いて「$(1.41)^2=1.9881\,,\,(\sqrt{2})^2=2\,,\,(1.42)^2=2.0164$」より「$1.41<\sqrt{2}<1.42$」がわかる。

また $\log_2 x>\log_2 4$ の解が $x>4$ であるのは $f(x)=\log_2 x$ の単調性からいえることである。

問題 1.5.1 *12

以下の 2 数の大小関係をいえ。

(1) $A=a^2+b^2\,,\ B=2ab$　　(ただし $a\,,\,b$ は定数)

(2) $C=\dfrac{a+b}{2}\,,\ D=\sqrt{ab}$　　(ただし $a\,,\,b$ は正の定数)

(3) $E=x^3-3x^2+3x\,,\ F=x^2-x$　　(ただし x は実数の定数)

問題 1.5.2 *13

関数 $f(x)$ は単調増加で、関数 $g(x)$ は単調減少である。$f(x)\,,\,g(x)$ はともにすべての実数 x について定義され、また任意の異なる $x\,,\,y$ に対して $f(x)\fallingdotseq f(y)\,,\,g(x)\fallingdotseq g(y)$ である。このとき不等式 $f(-1)\leqq f(x)<f(3)\,,\,g(x)<g(5)$ の解をそれぞれ求めよ。

問題 1.5.3 *14

(1) $x\,,\,y$ は 0 以上の数で n は正の整数とする。このとき次の同値関係を証明せよ。

「 $x>y \iff x^n>y^n$ 」

(注) $\Longrightarrow$ は $y=x^n\ (x\geqq 0)$ が単調増加であることの証明である。

(2) α が正の有理数であるとき 2^α は 1 より大きいことを証明せよ。

(3) $\alpha\,,\,\beta$ は有理数とする。$\alpha<\beta$ であるならば $2^\alpha<2^\beta$ であることを証明せよ。

(注) 有理数についてだけであるが $y=2^x$ が単調増加であることの証明と考えてもらってよいだろう。

---

*12 (1) $a\fallingdotseq b$ のとき $A>B\,,\,a=b$ のとき $A=B$

(2) $a\fallingdotseq b$ のとき $C>D\,,\,a=b$ のとき $C=D$

(3) $x=0\,,\,2$ のとき $E=F\,,\,x<0$ のとき $E<F\,,\,0<x<2\,,\,x>2$ のとき $E>F$

*13 順に $-1\leqq x<3\,,\,x>5$

*14 (1) 略　(2) と (3) の hint : (2) は (1) で、(3) は (2) で示されたことを利用する。

問題 1.5.4 [*15]

(1) $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{5}}$ の大小関係をいえ。

(2) $10^{\frac{4}{3}}$ の整数部分を求めよ。

(3) a は 1 でない正の定数とする。x についての不等式 $a^x < \sqrt{a}$ の解を求めよ。

(4) x についての不等式 $\log_a x < 3$ の解を求めよ。

(5) $10^3 < 2^{10}$, $2^{13} < 10^4$ であることを用いて $\log_{10} 2$ の小数第 2 位までが 0.30 であることを示せ。

1.6　整数部分と小数部分およびガウス記号

実数 A を $A = N + r$（ただし N は整数かつ $0 \leqq r < 1$）と表したときの N を A の整数部分、r を A の小数部分という。また A を超えない最大の整数を $[A]$ ([ ] をガウス記号という) で表すが、これは A の整数部分 N に等しい。

例）$3.2 = 3 + 0.2$ より 3.2 の整数部分あるいは $[3.2]$ は 3 で、小数部分は 0.2 である。

ガウス記号について以下の同値関係は重要である。

a_1)「N が整数のとき　$[A] = N \iff N \leqq A < N + 1$」

またこれから $[A] = N$ であるとき $N \leqq A < N + 1$ であるが、N を消去して以下の関係式を得る。

a_2)　$[A] \leqq A < [A] + 1$　　　a_3)　$A - 1 < [A] \leqq A$

問題 1.6.1 [*16]

(1) $\sqrt{3} + 1$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき $a^2 + b + \dfrac{1}{b}$ の値を求めよ。

(2) 実数 x の整数部分を N, 小数部分を r とするとき $2x = N + \sqrt{70}$ が成り立つという。

(i) r を N で表せ。　　(ii) (x, N, r) を求めよ。

(3) $x^2 + 2x$ の整数部分は 8 であるという。x はどのような数であるか。

（方程式 $[x^2 + 2x] = 8$ を解けというのと同問。）

問題 1.6.2 [*17]

(1) $y = x$ と $y = [x]$ のグラフを描け。

(2) $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ と $y = \left[\dfrac{1}{2}x + 1\right]$ のグラフを描け。

(3) 方程式 $\left[\dfrac{1}{2}x + 1\right] = \dfrac{7}{8}x + \dfrac{1}{4}$ の解を求めよ。

[*15] (1) $5^{\frac{1}{5}} < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$　(2) 21　(3) $a > 1$ のとき $x < \dfrac{1}{2}$, $0 < a < 1$ のとき $x > \dfrac{1}{2}$
(4) $a > 1$ のとき $0 < x < a^3$, $0 < a < 1$ のとき $x > a^3$　(5) 略

[*16] (1) $\dfrac{7}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　(2) (i) $\dfrac{\sqrt{70} - N}{2}$　(ii) $\left(\dfrac{7 + \sqrt{70}}{2}, 7, \dfrac{\sqrt{70} - 7}{2}\right)$, $\left(\dfrac{8 + \sqrt{70}}{2}, 8, \dfrac{\sqrt{70} - 8}{2}\right)$
(3) $-1 - \sqrt{10} < x \leqq -4$, $2 \leqq x < -1 + \sqrt{10}$

[*17] (1) 略　(2) 略　(3) $x = -\dfrac{2}{7}, \dfrac{6}{7}, 2$

1.7　整数部分の桁数と小数の最高位

整数部分の桁数は 10^l との大小比較で求まる。例えば 1 以上 10 未満の数は整数部分 1 桁であり、10 以上 100 未満の数は整数部分 2 桁である。一般に n を整数として

「A の整数部分は n 桁 $\iff 10^{n-1} \leqq A < 10^n \quad \cdots (*)$」

であるので、$(*)$ を満たす n を求めればよいことになる。(1.5 節②参照)

また 1 未満の数について、最高位が小数第何位であるかも、同様に 0.1 , 0.01 , 0.001 , $\cdots$ などとの大小比較を考えることになる。ただしここでは最高位が一の位である数をどれだけずらしたかとみるのが直感的である。例えば 1.23 を 10 で割ると 0.123(首位は小数第 1 位) であり、10^2 で割ると 0.0123 (首位は小数第 2 位) となる。一般に以下の同値関係を用いればよい。

「A は小数第 n 位に初めて 0 でない数が現れる $\iff \dfrac{1}{10^n} \leqq A < \dfrac{10}{10^n}$」

さらに最高位が 1 から 9 のどの数であるかは、網の目をより細かくして考える。例えば 3 桁の数は 100 以上 1000 未満であるが、これを 100 ～ 200 , 200 ～ 300 , ……, 900 ～ 1000 の 9 個のグループに分けて、どのグループに入っているかを求める。すなわち

「A の整数部分は n 桁で首位の数は $k \iff k \times 10^{n-1} \leqq A < (k+1) \times 10^{n-1}$」

である。小数の場合も同様の同値関係を用いればよい。

問題 1.7.1 [*18]

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として以下の問いに答えよ。

(1) 2^{51} は何桁の数か。また首位の数は何か。

(2) 6^{-35} を小数で表すとき、小数第何位に初めて 0 でない数が現れるか。またその数は何か。

(3) (i) $7^2 < 50$ であることから $\log_{10} 7 < 0.85$ であることを示せ。

(ii) $\log_{10} A = 13.57$, $\log_{10} B = 24.68$ であるとき AB の整数部分の桁数と首位の数を求めよ。また $\dfrac{A}{B}$ について初めて 0 でない数が現れる小数位とその数を求めよ。

[*18] (1) 順に 16 , 2 (2) 順に 28 , 5 (3) (i) 略 (ii) 順に 38 , 1 , 12 , 7

1.8 $x\,,\,y$ の方程式・不等式の解の図示

例えば x と y についての方程式 $x+y-1=0\cdots(*)$ を満たす解 $(x\,,\,y)$ は有限個ではなく、無数にある。いま特に $x\,,\,y$ を実数に限ると、解 $(x\,,\,y)$ は xy 平面上の点に対応するが、xy 平面上の点の一つ一つは解になるか(対応するか)ならないかのどちらかに分けられる。方程式のグラフとはまさにこの解となる点の集合のことである。このような処理をすることで多くの場合問題が考えやすくなる。なお $(*)$ は $y=-x+1$ と同値である。したがって1次関数 $y=-x+1$ と、方程式 $x+y-1=0$ のグラフは一致する。

① 方程式 $f(x\,,\,y)=0$ の解の集合

前述した通り、与式を満たす実数 $x\,,\,y$ の組はグラフとして xy 平面で表される。例えば連立方程式 $x^2+y^2=1\,,\,x+y=1$ を解くのに中学生は数式処理を実行するのであろうが、グラフを用いると円と直線の交点を考えれば良いことになり、解がすぐにわかる。グラフをもちだすメリットはこのようなところにある。

② 不等式 $f(x\,,\,y)>0$ などの解の集合

虚数に対しての大小の順序付けは出来ないので、不等式では $x\,,\,y$ が実数であることは暗黙の了解である。方程式の場合、解の集合はグラフであったが、不等式の解の集合については「領域」と呼ぶ。領域の作図方法は大きく分けて次の2つである。

(方法1) 曲線 $y=f(x)$ との上下関係を考える。

例えば不等式 $y>x^2+3\cdots(\diamondsuit)$ の解は次のようにして求まる。まず xy 平面上で x 座標が 0 である点について解になるかならないかを考える。$x=0$ を $(\diamondsuit)$ に代入すると $y>3$ となるので y 座標が 3 より大きい点が不等式の解である。また $x=1$ である点については $x=1$ を $(\diamondsuit)$ に代入して $y>4$ となるので y 座標が 4 より大きい点が不等式の解である。以下同様にして $x=k$ という直線上では点 $\mathrm{P}_k(k\,,\,k^2+3)$ よりも上にある点が解であることがわかる。さらにすべての k に対して点 P_k は曲線 $y=x^2+3$ 上にあるので、この曲線の上側にある部分が不等式の解の集合である。

(方法2) 図形的な意味を考える。

不等式のもつ意味から解の集合がわかるときがある。特に重要なのは、不等式が定点からの距離についての関係式になっているものである。例えば $(x-2)^2+(y-5)^2<9$ という式の左辺は2点 $(x\,,\,y)\,,\,(2\,,\,5)$ 間の距離の2乗を表す。したがって不等式の解とは、点 $(2\,,\,5)$ からの距離が3より小さい $(x\,,\,y)$ である。なお、この場合も「$<$」を「$=$」として得られるグラフ(ここでは円)を用いて図示することになる。また、稀にではあるが2点をつなぐ線分の傾きについての関係 $\left(\dfrac{y-b}{x-a}<c\ \text{など}\right)$ から領域を作図する場合もある。

問題 1.8.1 [*19]

以下の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y<x^2$　(2) $2x+y-4>0$　(3) $y\leqq x^2-4x-5$　(4) $x>y^2+1$

(5) $y>\dfrac{1}{x}$　(6) $y\leqq\sqrt{1-x^2}$

[*19] 略

問題 1.8.2 [*20]

以下の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $(x-1)^2+(y-2)^2<5$　(2) $(x-3)^2+(y+4)^2 \geqq 16$　(3) $x^2+y^2>1$

(4) $x^2+y^2-5x+6y+2>0$　(5) $-1<\dfrac{y-1}{x-2}<2$　(6) $\dfrac{x+2}{y}<1$

(7) $(x-y)(2x+y+3)>0$　(8) $(x^2+y^2-6)(x^2-y) \leqq 0$

1.9 分数式・無理式の式変形と方程式・不等式

分数式・無理式の式変形では以下の性質に留意する必要がある。

① $a<b$ であるとき

「 $c>0$ ならば $ac<bc$ ， $c=0$ ならば $ac=bc$ ， $c<0$ ならば $ac>bc$ 」

② ①より次の同値関係が得られる。

$$\frac{B}{A}>C \iff 「A>0 \text{ かつ } B>AC」\text{または}「A<0 \text{ かつ } B<AC」$$

③ 無理式の方程式・不等式では例えば 2 乗してルートをはずせばよいが、次の同値関係は理解しておかなければならない。

(i) $\sqrt{A}=B \iff A=B^2$ かつ $B \geqq 0$

(ii) $\sqrt{A}<B \iff A \geqq 0$ かつ $B>0$ かつ $A<B^2$

(iii) $\sqrt{A}>B \iff$「$B<0$ かつ $A \geqq 0$」または「$B \geqq 0$ かつ $A>B^2$」

注）②③とも、グラフが描けるときは、同値関係を意識する必要はない。また③において B の符号がわかっているときは、条件の言い換えはもっと簡単になる。例えば $B>0$ であるとき(iii) は「$\sqrt{A}>B \iff A>B^2$」でよい。

問題 1.9.1 [*21]

次の方程式・不等式をそれぞれ解け。

(1) $\dfrac{1}{x}>3$　(2) $\dfrac{2x^2}{x-1}<9$　(3) $\dfrac{3x}{x^2-1} \geqq 2$

(4) $\sqrt{x-1}=-x+3$　(5) $\sqrt{-x^2+8}<2$　(6) $\sqrt{x-2}>x-4$

問題 1.9.2 [*22]

次の不等式の表す領域を xy 平面に図示せよ。

(1) $\dfrac{y}{x}>x$　(2) $xy<1$

(3) $\sqrt{x-y}<x$　(4) $\sqrt{-x^2-2y+1}>y$

[*20] 略

[*21] (1) $0<x<\dfrac{1}{3}$　(2) $x<1$, $\dfrac{3}{2}<x<3$　(3) $-1<x \leqq -\dfrac{1}{2}$, $1<x \leqq 2$　(4) 2
(5) $-\sqrt{8} \leqq x<-2$, $2<x \leqq \sqrt{8}$　(6) $2 \leqq x<6$

[*22] 略

1.10 整式の除法

(*Definition*)

2 つの整式 $F(x)$, $A(x)$ に対して以下の条件を満たす整式 $Q(x)$, $R(x)$ がただ一組存在する。

「$A(x)$の次数 $>$ $R(x)$の次数 かつ $F(x)=A(x)Q(x)+R(x)$ は x についての恒等式」

この $Q(x)$, $R(x)$ をそれぞれ、$F(x)$ を $A(x)$ で割った商・余りという。 □ ◪

注）0 以外の定数は 0 次、0 の次数は $-\infty$ とすると都合が良い。

上記の繰り返しになるが、以下は重要性質である。
すなわち $F(x)$ を $A(x)$ で割った商が $Q(x)$、余りが $R(x)$ という整式の除法において

ｉ） $F(x)=A(x)Q(x)+R(x)$ $\cdots\cdots(*)$

ii） $A(x)$の次数 $>$ $R(x)$の次数

iii） $(*)$ は x についての恒等式。

問題 1.10.1 [*23]

(1) $2x^3-4x^2+1$ を $2x-6$ で割ったときの商と余りを求めよ。

(2) 整式 $f(x)$ を $-x^2+3$ で割ったときの商は $\dfrac{1}{2}x^2+4x-2$ で、余りは $-3x+5$ であるという。$f(x)$ を求めよ。

問題 1.10.2 [*24]

(1) 整式 $f(x)$ を $x-1$ で割った余りは 3 であり、$2x+1$ で割った余りは 6 であるという。$f(x)$ を $(2x+1)(x-1)$ で割った余りを求めよ。

(2) 整式 $f(x)$ を x^2-3x+2 で割った余りは $3x$ で、x^2-5x+6 で割った余りは $5x-4$ である。$f(x)$ を x^2-4x+3 で割った余りを求めよ。

(3) 整式 $f(x)$ を $2x+1$ で割った余りが $\dfrac{3}{2}$ で、$4x^2-2x+1$ で割った余りが $5x+1$ であるとき、$f(x)$ を $8x^3+1$ で割った余りを求めよ。

問題 1.10.3 [*25]

(1) (i) $2-\sqrt{3}$ を解とする整数係数の 2 次方程式 $f(x)=0$ を一ついえ。

(ii) x^3+2x^2+3x+4 を $f(x)$ で割ったときの商と余りを求めよ。

(iii) (ii)の結果を用いて $x=2-\sqrt{3}$ のときの x^3+2x^2+3x+4 の値を求めよ。

(2) $x=\dfrac{1}{2}(-1+3i)$ のときの $2x^3-8x^2+1$ の値を求めよ。

(3) $y=x^4-\dfrac{28}{3}x^3+26x^2-28x+5$ の極大値を求めよ。

[*23] (1) 商 x^2+x+3 余り 19 (2) $\dfrac{1}{2}x^4-4x^3+\dfrac{7}{2}x^2+9x-1$

[*24] (1) $-2x+5$ (2) $4x-1$ (3) $4x^2+3x+2$

[*25] (1) (i) $x^2-4x+1=0$ (ii) 商 $x+6$ 余り $26x-2$ (iii) $50-26\sqrt{3}$ (2) $\dfrac{47+15i}{2}$ (3) $-20+\dfrac{32}{3}\sqrt{2}$

1.11　剰余の定理・因数定理

整式の除法の性質(1.10 参照)から、次の二つの定理が得られる。

① 剰余の定理

整式 $f(x)$ を $ax+b\ (a \fallingdotseq 0)$ で割った余りは $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ である。

② 因数定理

整式 $f(x)$ について 「 $f(\alpha)=0 \iff f(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる 」

注）特に「 $\Longrightarrow$ 」すなわち、解を用いて因数分解できるということ、が因数定理について重要である。

問題 1.11.1 *26

剰余の定理と因数定理をそれぞれ証明せよ。

問題 1.11.2 *27

剰余の定理・因数定理を用いて、以下の問いに答えよ。

(1) $x^4+2x^3-x^2+5$ を $x-1$ で割った余りと $2x+1$ で割った余りをそれぞれ求めよ。

(2) $x^{101}+ax+b$ を $x-1$ で割ると 8 余り、かつ $x+1$ では割り切れるように a, b の値を定めよ。

問題 1.11.3 *28

(1) x の方程式 $30ax^2-377x-126=0$ が $\dfrac{9}{2}$ を解にもつような a の値を求めよ。またそのときのもう一つの解を求めよ。

(2) 放物線 $y=3x^2$ と直線 $y=-2x+n$ が $x=\sqrt{a}$ なる点で交わるとき、n を a で表せ。またもう一つの交点の x 座標を a で表せ。

(3) 放物線 $y=2x^2+3x+4$ と直線 $y=mx+n$ は x 座標が $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ なる 2 点で交わっている。$2x^2+3x+4-(mx+n)$ を因数分解せよ。

(4) a は正の定数とする。$y=x^3+3ax^2$ のグラフと、この極大点における接線との共有点のうち、接点でないものの x 座標を求めよ。

(5) $a \fallingdotseq 4$ とする。$y=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$ のグラフと、$x=4$ に対する点においての接線との共有点のうち、接点でないものの x 座標を求めよ。

注）(4) (5)では、x の整式 $f(x)$, $g(x)$ について $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが $x=a$ において接するとき $f(x)-g(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れるという事実を用いる。

---

*26 略

*27 (1) 順に 7 , $\dfrac{73}{16}$ (2) $a=3$, $b=4$

*28 (1) 順に 3 , $-\dfrac{14}{45}$ (2) 順に $3a+2\sqrt{a}$, $\dfrac{2+3\sqrt{a}}{-3}$ (3) $2\{x-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}\{x-(\sqrt{3}+\sqrt{2})\}$ (4) a (5) $3a-8$

1.12 式の展開

式の展開は、分配法則 $(x+y)z = xz+yz$, $x(y+z) = xy+xz$ に基づきなされる。これから展開項として得られるものは、例えば

$$
\begin{aligned}
&(x_1+y_1)(x_2+y_2) = x_1(x_2+y_2)+y_1(x_2+y_2) = x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2\\
&(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)\\
&\qquad = (x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2)x_3+(x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2)y_3\\
&\qquad = x_1x_2x_3+x_1y_2x_3+y_1x_2x_3+y_1y_2x_3+x_1x_2y_3+x_1y_2y_3+y_1x_2y_3+y_1y_2y_3
\end{aligned}
$$

などのように、各括弧から項を一つずつ選んだ積になることがわかる。($\leftrightarrow$ 添字がいずれも $1, 2$ または $1, 2, 3$ であることに注意。)

① 展開(因数分解)公式

a_1) $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$ 　　a_2) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$

a_3) $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

a_4) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = x^3+y^3+z^3-3xyz$

a_5) $(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}) = x^n-y^n$

② 二項展開

既に触れたように、$(x+y)^n$ の展開で現れる項は、各括弧から x , y の一方を選ぶことで取り出された n 個の積である。これから $x^{n-k}y^k$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_k$ である(二項定理)ことがわかるが、さらにすべての k を考えることで以下の関係式が得られる。

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= {}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}y+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}y^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xy^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_ny^n\\
&= \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^{n-k}y^k
\end{aligned}
$$

また ${}_{n+1}\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_0$, ${}_{n+1}\mathrm{C}_n = {}_n\mathrm{C}_n$ であり

$l = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ について

$${}_{n+1}\mathrm{C}_{l+1} = {}_n\mathrm{C}_l+{}_n\mathrm{C}_{l+1}$$

であるので $(x+y)^2$, $(x+y)^3$, $(x+y)^4$, $\cdots$ の展開式の係数を求めるのに、パスカルの三角形(右図)が利用できることがわかる。

$$
\begin{array}{lc}
 & 1\\
(x+y)^1 \ \rightarrow & 1 \quad 1\\
(x+y)^2 \ \rightarrow & 1 \quad 2 \quad 1\\
(x+y)^3 \ \rightarrow & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
(x+y)^4 \ \rightarrow & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
(x+y)^5 \ \rightarrow & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots
\end{array}
$$

③ 多項定理

これも組合せを考えることで、一般に $(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_l)^n$ を展開したときの $x_1^{p_1}x_2^{p_2}x_3^{p_3}\cdots x_l^{p_l}$ (p_1 , p_2 , p_3 , $\cdots$, p_l は 0 以上の整数で $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_l = n$) の係数は ${}_n\mathrm{C}_{p_1}\times{}_{n-p_1}\mathrm{C}_{p_2}\times{}_{n-p_1-p_2}\mathrm{C}_{p_3}\times\cdots\times{}_{n-p_1-p_2-\cdots-p_{l-1}}\mathrm{C}_{p_l}\left(= \dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\,p_3!\cdots p_l!}\right)$ であることがわかる。

問題 1.12.1 [*29]

次のそれぞれを展開せよ。

(1) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$　(2) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$

(3) $(3x-2y+z)(9x^2+4y^2+z^2+6xy+2yz-3zx)$

問題 1.12.2 [*30]

(1) $(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)(j+k+l+m+n)$ を展開したとき現れる項数を求めよ。

(2) 次の式を展開して整理したときの最高次の項と、x^3 の係数および定数項を、それぞれ求めよ。

$(x^3+x+2)(-4x^2+3x+1)+(x^4-3x^3-5x^2+2)(x-6)-(x^2+2x+3)(-4x^2+5x)$

(3) 次の式を展開して整理したときの x^4 と x^3 の係数をそれぞれ求めよ。

$(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x-2)(\sqrt{2}x-3)(\sqrt{2}x-4)(\sqrt{2}x-5)$

問題 1.12.3 [*31]

以下の各式を展開して x についての降べきの順で表せ。

(1) $(x^2-2x+3)^2$　(2) $(2x+1)^3$　(3) $\left(\dfrac{1}{3}x-4y\right)^3$

(4) $(x+y)^6$

問題 1.12.4 [*32]

(1) $\left(4x+\dfrac{1}{2}\right)^{10}$ を展開したときの x^4 の係数を求めよ。

(2) $(x-2y)^{12}$ を展開したときの x^9y^3 の係数を求めよ。

(3) $(2x+y+3z)^8$ を展開したときの x^2y^5z の係数を求めよ。

(4) $(x^3+x^2+x+1)^6$ について以下の問いに答えよ。

(i) $p\,,\,q\,,\,r$ は 0 以上の整数とする。x^3 を p 個、x^2 を q 個、x を r 個掛けて x^3 になるための $p\,,\,q\,,\,r$ の条件をいえ。

(ii) 展開したときの x^3 の係数を求めよ。

問題 1.12.5 [*33]

(1) x^n を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。ここで n は正の整数である。

(2) x^n を $(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ。ここで n は正の整数である。

(3) x^{10} を $(2x+1)^2$ で割った余りを求めよ。

[*29] (1) $x^4+x^2y^2+y^4$　(2) $8x^3+y^3$　(3) $27x^3-8y^3+z^3+18xyz$

[*30] (1) 120　(2) 順に $-3x^5$, 13 , -10　(3) 順に -60 , $170\sqrt{2}$

[*31] (1) $x^4-4x^3+10x^2-12x+9$　(2) $8x^3+12x^2+6x+1$　(3) $\dfrac{1}{27}x^3-\dfrac{4}{3}x^2y+16xy^2-64y^3$
(4) $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$

[*32] (1) 840　(2) -1760　(3) 2016　(4) (i) $(p\,,\,q\,,\,r)=(1\,,\,0\,,\,0)$ または $(0\,,\,0\,,\,3)$ または $(0\,,\,1\,,\,1)$ (ii) 56

[*33] (1) x　(2) $(-2)^n+n(-2)^{n-1}(x+2)$　(3) $\dfrac{-10x+1}{1024}$

1.13　因数分解

因数分解にはいくつかの方法がある。

方法 ① 公式の利用（↔ 展開公式の逆の変形）

② 2 次式はたすき掛け

③ 文字が複数あるときは、最低次の文字で整理する。

④ 方程式の解を用いる。(↔ 因数定理)

⑤ 複 2 次式は　i) $x^2 = u$ などとおく。　ii) $(\quad)^2 - (\quad)^2$ の形にする。

⑥ 相反形は　iii) 奇数次の場合 $x+1$ で割り切れる。

iv) 偶数次の場合は、中央にある x^k で割ると x と $\dfrac{1}{x}$ の対称式になることを利用する。(→1.16③参照)

注）係数の並びが降べきの順、昇べきの順のどちらでも同じになる整式を相反形という。相反形では係数の並びが対称的(aba , $abba$, $abcba$ など)である。
$f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$ 等、奇数次のときは $x = -1$ が $f(x) = 0$ の解になるので $x+1$ が因数になる。

問題 1.13.1 *34

因数分解せよ。

(1) $x^3 + (a+6)x^2 + (6a-2)x - 12$　(2) $3x^2 + 2xy - 8y^2 + 16x - 18y + 5$

(3) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 12yz - 6zx$　(4) $8x^3 - y^3 - 27z^3 - 18xyz$

問題 1.13.2 *35

(1) 以下の各式を 1 次式の積で表せ。

(i) $x^3 + 5x^2 - x - 5$　(ii) $x^2 + 2x - 5$

(2) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ とする。$y = f(x)$ のグラフが、点 $(1\,,\,0)$ を通るとき、以下の問いに答えよ。

(i) $f(x)$ を b を用いない因数分解形にせよ。

(ii) $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつような a の条件を求めよ。

問題 1.13.3 *36

以下の各式を、有理数係数範囲で因数分解せよ。

(1) $x^4 - 5x^2 + 4$　(2) $x^4 + x^2 + 1$　(3) $4x^4 + 1$

(4) $x^4 - 13x^2 + 4$　(5) $x^6 - x^4 - 10x^2 - 8$

---

*34 (1) $(x+6)(x^2+ax-2)$　(2) $(x+2y+5)(3x-4y+1)$　(3) $(x+2y-3z)^2$
(4) $(2x-y-3z)(4x^2+y^2+9z^2+2xy-3yz+6zx)$

*35 (1) (i) $(x-1)(x+1)(x+5)$ (ii) $(x+1-\sqrt{6})(x+1-\sqrt{6})$
(2) (i) $(x-1)\{x^2+(a+1)x+4\}$ (ii) $a \fallingdotseq -6$ かつ「$a < -5$ または $a > 3$」

*36 (1) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$　(2) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$　(3) $(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$
(4) $(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$　(5) $(x^2+1)(x^2+2)(x+2)(x-2)$

問題 1.13.4 [*37]

(1) $f(x)=x^4+2x^3-13x^2+2x+1$ とする。

　(i) $x+\dfrac{1}{x}=u$ とする。$\dfrac{f(x)}{x^2}$ を u の 1 次式の積で表せ。

　(ii) $f(x)$ を有理数係数範囲で因数分解せよ。

(2) x^5-1 を実数係数範囲で因数分解せよ。

(3) $x^3+(\sqrt{8}+1)x^2+(\sqrt{8}+1)x+1$ を実数係数範囲で因数分解せよ。

1.14　$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

この因数分解公式については問題とされるお決まりのパターンがあり、それぞれ覚えるべきと思われるので、ここで特に取り上げておく。

① $x+y+z=0$ のときの $x^3+y^3+z^3$ の因数分解

　$x+y+z=0$ のとき $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$ であるので $x^3+y^3+z^3=3xyz$ となる。

② x, y, z の対称式 $x^3+y^3+z^3$ の基本対称式変形

→ 1.15 および 1.16 参照のこと。

③ 3 数の相加平均・相乗平均の関係の証明

ここで特に、不等式 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geqq 0$ の証明は重要である。

方法１）
$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx&=x^2-(y+z)x+y^2+z^2-yz\\&=\left(x-\frac{y+z}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(y+z)^2+y^2+z^2-yz\\&=\left(x-\frac{y+z}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2-\frac{3}{2}yz+\frac{3}{4}z^2\\&=\left(x-\frac{y+z}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-z)^2\geqq 0\end{aligned}$$

方法２）
$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx&=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)\\&=\frac{1}{2}\left\{(x^2+y^2-2xy)+(y^2+z^2-2yz)+(z^2+x^2-2zx)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\}\geqq 0\end{aligned}$$

問題 1.14.1 [*38]

(1) $(x^3-y^3)^3+(y^3-z^3)^3+(z^3-x^3)^3$ を因数分解せよ。

(2) (i) $E=a^3+b^3+c^3$, $F=3abc$ (ただし a, b, c は正の定数) の大小関係を答えよ。

　(ii) 3 数の相加平均・相乗平均の関係式「$x>0$, $y>0$, $z>0$ のとき $\dfrac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz}$」を示せ。また等号成立条件を求めよ。

[*37] (1) (i) $(u+5)(u-3)$ (ii) $(x^2+5x+1)(x^2-3x+1)$　(2) $(x-1)\left(x^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)$
(3) $(x+1)(x+\sqrt{2}-1)(x+\sqrt{2}+1)$

[*38] (1) $3(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)$
(2) (i) $a=b=c$ のとき $E=F$, それ以外のとき $E>F$ (ii) 証明略 , 等号成立条件は $x=y=z$

1.15　解と係数の関係

(*Definition*)

整式 $f(x)$ を $(x-\alpha)$ で割って $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ であるとき α を $f(x)$ の根という。また一般に n 次の整式 $f(x)$ は n 個の 1 次式の積で表される。

$$f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$$

であって $\alpha_1\sim\alpha_n$ のうち α と等しいものがちょうど l 個あるとき、α を $f(x)$ の l 重根という。

□ ⍁

$f(x)$ が整式であるときは、α が $f(x)$ の根であることと α が $f(x)=0$ の解であることは同値である。また特に l 重解については根の場合と同様、因数分解形から定義する。すなわち、一般に n 次方程式の解は l 重解を l 個と数えて n 個である。

① 2 次方程式の解と係数の関係

「2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解が $\alpha,\beta \iff \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\ ,\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$」

② 3 次方程式の解と係数の関係

「3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解が α,β,γ

$$\iff \alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}\ ,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}\ ,\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$」

③ 一般には以下の等式の恒等式条件(1.17 参照)を考えればよい。

「$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$

$$=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$$」

注）α,β が例えば 2 次方程式の解というとき、因数分解形 $(x-\alpha)(x-\beta)=0\ \cdots(*)$ をイメージすることは重要である。また α,β を解とする 2 次方程式をつくる場合も $(*)$ を考えればよい。

問題 1.15.1 [*39]

(1) 2 次方程式 $2x^2+(m-6)x-3m=0$ の 2 つの解の比が $1:2$ となるような定数 m の値を求めよ。

(2) 2 次方程式 $3x^2-px+4=0$ の 2 つの解を α,β とする。$\dfrac{1}{\alpha},\dfrac{1}{\beta}$ を 2 つの解とする 2 次方程式で、x^2 の係数が 4 であるものを求めよ。

(3) $y=2x^2-x-3$ のグラフと、直線 $y=mx+1$ との 2 つの交点を A , B とする。線分 AB の中点の座標を求めよ。また 2 点 A , B の x 座標の積と y 座標の積が等しくなるような m の値を求めよ。

(4) 2 次方程式 $2x^2-(a+1)x+4a=0$ の 2 つの解がともに整数となるような a の値を求めよ。

[*39] (1) $-12,-3$ (2) $4x^2-px+3=0$ (3) $\left(\dfrac{m+1}{4},\dfrac{m^2+m+4}{4}\right)$, $\dfrac{1\pm\sqrt{73}}{6}$ (4) $-15,-3,33,45$

問題 1.15.2 *40

放物線 $y=x^2$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(\alpha\,,\,\alpha^2)\,,\,\mathrm{Q}(\beta\,,\,\beta^2)$ があり、点 P, Q における接線はともに定点 $\mathrm{R}(a\,,\,b)$ を通っている。ここで $\alpha<\beta\,,\,b<0$ とする。

(1) 微分を用いて、点 P, Q における接線の方程式をそれぞれ $\alpha\,,\,\beta$ で表せ。

(2) $\alpha\,,\,\beta$ を 2 つの解とする 2 次方程式を求めよ。

(3) 線分 PQ の中点を M とする。点 M の x 座標と点 R の x 座標は等しいことを示せ。またこの事実を用いて、△PQR の面積を求めよ。

問題 1.15.3 *41

(1) 3 次方程式 $4x^3+mx^2+11x-3=0$ の 3 つの解を $\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma$ とする。$\alpha-2\,,\,\beta-2\,,\,\gamma-2$ を 3 つの解とする 3 次方程式で、x^3 の係数が 4 であるものを求めよ。また $\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma$ が有理数で等差数列をなすときの m の値を求めよ。

(2) n は 4 以上の正の整数とする。$2x^n+3x^2+5x-4=0$ の n 個の解 $\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\alpha_3\,,\,\cdots\cdots,\,\alpha_n$ の総和と積をそれぞれ求めよ。また $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\cdots\cdots(1-\alpha_n)$ の値を求めよ。

（補足）

解と係数の関係というと $\Longrightarrow$ だけというイメージがあるかもしれないが、逆もまた重要である。

① 「$x+y=p\,,\,xy=q$ を満たす $x\,,\,y$ は $t^2-pt+q=0$ の 2 つの解である」

② 「$x+y+z=p\,,\,xy+yz+zx=q\,,\,xyz=r$ を満たす $x\,,\,y\,,\,z$ は $t^3-pt^2+qt-r=0$ の 3 つの解である」

通常連立方程式は文字消去で未知数を減らして、一つの未知数から順に解を求めるが、上の性質を用いるとすべてが同時に求まり、綺麗な解法になる。

問題 1.15.4 *42

(1) 上記①および②を証明せよ。

(2) $x+y=2\,,\,xy=4$ の解を求めよ。

(3) $x+y+z=1\,,\,xy+yz+zx=-5\,,\,xyz=-2\ (x<y<z)$ の解を求めよ。

(4) p は実数で定数とする。$x+y+z=3\,,\,xy+yz+zx=0\,,\,xyz=p$ を満たす実数 $x\,,\,y\,,\,z$ の組 $(x\,,\,y\,,\,z)$ の個数を求めよ。

*40 (1) 順に $y=2\alpha x-\alpha^2\,,\,y=2\beta x-\beta^2$ (2) $x^2-2ax+b=0$ (3) 証明略，面積は $2(a^2-b)\sqrt{a^2-b}$

*41 (1) $4x^3+(m+24)x^2+(4m+59)x+4m+51=0$，$-12$ (2) 順に 0，$(-1)^{n-1}2$，3

*42 (1) 略　(2) $x=1\pm\sqrt{3}i\,,\,y=1\mp\sqrt{3}i$（複号同順）(3) $x=-2\,,\,y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\,,\,z=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

(4) $p<-4\,,\,p>0$ ならば 0 個，$p=-4\,,\,0$ ならば 3 個，$-4<p<0$ ならば 6 個

1.16 対称式

(*Definition*)

$f(x\,,\,y)$ において $x\,,\,y$ を入れ換えても同じ式になるとき、$f(x\,,\,y)$ を $x\,,\,y$ の対称式という。さらに文字が複数ある式で、その文字のうちのどの 2 つを入れ換えても元と同じになるものを、それらの文字についての対称式という。

また特に x の n 次式 $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$ を展開したときに得られる係数を n 次の基本対称式という。 □ ⧄

対称式には、(同次の)基本対称式だけで表わされるという重要な性質があって、以下のようなものが頻出である。

注）基本対称式だけで表すことを基本対称式変形という。

① 2 文字の対称式 → 基本対称式は $x+y\,,\,xy$

次の基本対称式変形は覚えておきたい。

a_1） $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ a_2） $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

a_3） $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ a_4） $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

a_5） $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$

注）$a_4)\,,\,a_5)$ はさらに $a_1)\,,\,a_3)$ を用いて変形する。$a_7)$ も途中の式。

② 3 文字の対称式 → 基本対称式は $x+y+z\,,\,xy+yz+zx\,,\,xyz$

a_6） $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

a_7） $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

③ t と t^{-1} の対称式 → 基本対称式は $t+t^{-1},\ t\cdot t^{-1}$

①の $x\,,\,y$ がそれぞれ $t\,,\,t^{-1}$ の場合である。ただし $t\cdot t^{-1}=1$ であるので、$t+t^{-1}$ だけで表せるという性質がある。なお、積が定数になることが本質なので、t と $-t^{-1}$ など、一般には at と bt^{-1} の組み合わせで同様である。

④ $\sin\theta\,,\,\cos\theta$ の対称式 → 基本対称式は $\sin\theta+\cos\theta\,,\,\sin\theta\cos\theta$

これも①の特殊な場合で $x\,,\,y$ をそれぞれ $\sin\theta\,,\,\cos\theta$ とすればよい。ただし θ についての恒等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ が成り立つので、$u=\sin\theta+\cos\theta$ として

$$u^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta\ \ ,\ \ \sin\theta\cos\theta=\frac{u^2-1}{2}$$

すなわち $\sin\theta+\cos\theta$ だけで表せるという性質がある。また $\cos\theta$ は $-\cos\theta$ でも同様である。

問題 1.16.1 [*43]

(1) $x^2-2x-4=0$ の 2 つの解を $\alpha\,,\,\beta$ とする。$\alpha^2+\beta^2\,,\,\alpha^3+\beta^3\,,\,\alpha^4+\beta^4\,,\,\alpha^5+\beta^5$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\alpha-\beta=1\,,\,\alpha\beta=2$ とする。以下の式が、いずれも α と $-\beta$ の対称式であることを用いて、

[*43] (1) 順に $12\,,\,32\,,\,112\,,\,352$ (2) 順に $5\,,\,7\,,\,17\,,\,31$ (3) 順に $10\,,\,-42\,,\,5$

$\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3-\beta^3$, $\alpha^4+\beta^4$, $\alpha^5-\beta^5$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) $2x^3+6x^2-x+7=0$ の 3 つの解を α, β, γ とする。$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$, $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$ の値をそれぞれ求めよ。

問題 1.16.2 [*44]

(1) $y=x^2-8x-\dfrac{8}{x}+\dfrac{1}{x^2}\ (x>0)$ を $u=x+\dfrac{1}{x}$ で表わし、y の最小値と、それを与える x の値を求めよ。

(2) $f(x)=4^x+4^{-x}+4(2^x-2^{-x})+5$ とする。$f(x)$ が 2^x と -2^{-x} の対称式であることを用いて、$f(x)$ の最小値と、それを与える x の値を求めよ。

問題 1.16.3 [*45]

(1) $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき $\sin^3\theta+\cos^3\theta$, $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき $\sin^3\theta-\cos^3\theta$, $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ の値をそれぞれ求めよ。さらに θ が第Ⅲ象限の角であるとき、$\sin\theta+\cos\theta$ および $\sin\theta$, $\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) $y=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta+1}\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。

[*44] (1) 順に $y=u^2-8u-2$, -18, $2\pm\sqrt{3}$ (2) 順に 3, $\log_2(-1+\sqrt{2})$

[*45] (1) 順に $-\dfrac{11}{16}$, $\dfrac{23}{32}$ (2) 順に $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{13}{27}$, $\dfrac{49}{81}$, $-\dfrac{\sqrt{17}}{3}$, $\dfrac{1-\sqrt{17}}{6}$, $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{6}$ (3) 順に $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$, 0

1.17 恒等式

(*Definition*)

$f(x)=g(x)\ \cdots(*)$ が x の恒等式であるとは、$(*)$ が任意の x に対して成り立つことである。 □ ◪

---

① 特に n 次の整式についての以下の同値関係は重要である。

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$
$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0 \quad \text{として}$$

「$f(x)=g(x)$ が x の恒等式

$$\iff a_n=b_n\,,\ a_{n-1}=b_{n-1}\,,\ \cdots\cdots\,,\ a_2=b_2\,,\ a_1=b_1\,,\ a_0=b_0$$ 」

② 整式だけでなく、三角関数や行列についての恒等式条件を題材にした問題は多い。そのような場合は、まず必要条件を考えてみるのがポイントである。

注) 恒等式条件は全称命題(**??**節参照 ← 書きかけです)の一つである。

問題 1.17.1 *46

$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式であることと $a=b=c=0$ は同値である。これを証明せよ。

問題 1.17.2 *47

次のそれぞれが x の恒等式となるための条件を求めよ。

(1) $ax^2+bx+c=3x^2-2x+4$ (2) $ax^4-3x^3+bx+c=2x^4+dx^3-ex^2+4$

(3) $2x(x-1)^2+a(x+1)^2+bx+c=d(x+2)^3$

(4) $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{2x+1}=\dfrac{4x+c}{x(2x+1)^2}$ (5) $ax(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d=0$

問題 1.17.3 *48

(1) 以下のそれぞれの曲線は定数 a の値によらずある定点を通る。その定点の座標を答えよ。

(i) $y=ax-3a+5$ (ii) $y=(a+1)x^2-2ax+3$

(2) $x^2-2x+y-8+k(x^2-y)=0$ の表す曲線は定数 k の値によらず、常に 2 曲線 $y=x^2$, $y=-x^2+2x+8$ の交点を通過する。これを証明せよ。また $k=-1$ のとき得られる曲線はどのような意味を持つか。

---

*46 略

*47 (1) $a=3\,,\ b=-2\,,\ c=4$ (2) $a=2\,,\ b=e=0\,,\ c=4\,,\ d=-3$
(3) $a=16\,,\ b=-10\,,\ c=0\,,\ d=2$ (4) $a=2\,,\ b=4\,,\ c=2$ (5) $a=b=c=d=0$

*48 (1) (i) $(3,5)$ (ii) $(0,3)$, $(2,7)$ (2) 証明略 , 2 つの放物線の交点を通る直線

問題 1.17.4 [*49]

　$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + \cos^2 x + c = 0 \ \cdots(*)$ について以下の問いに答えよ。

(1) $(*)$ が $x = 0$ について成り立つときの a, b, c の関係式を求めよ。

(2) (1)と同様に、具体的に x にいくつかの値を代入して

　「 $(*)$ が x の恒等式 ならば $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$ 」

　であることを示せ。

(3) $(*)$ が x の恒等式であるための必要十分条件をいえ。

1.18　文字の消去

　文字が複数あるときは、(対称式など例外はあるが)関係式を用いて文字の個数を減らすことは基本である。

① 関係式が等式のとき。

　例えば a を消去する場合、$a =$ (a を用いない式) という形をつくり代入する、という方法が重要である。他には 2 式を足したり引いたりしてという方法もある。

② 関係式が不等式のとき。

　いろいろなところで不等式を利用する局面は現れるが、特に整数問題で不等式から文字を減らすとうまくゆく場合がある。例えば a, b は整数で $a^2 = b + 3$ かつ $b < a$ であるとき $a^2 = b + 3 < a + 3$ であり、まず $a^2 < a + 3$ を満たす a を求めればよいことになる。

問題 1.18.1 [*50]

(1) $a + b = 2$ であるとき $a^2 + 2ab - 4b^2$ の最大値と、それを与える a, b の値を求めよ。

(2) $a + 5b - c = 5$, $3a + 12b - 2c = 11$ であるとき $a^2 + b^2 + c^2$ を b で表せ。

　また $a^2 + b^2 + c^2$ の最大値と、それを与える a, b, c の値を求めよ。

(3) $x + y + z = 1$ かつ $2x + 3y - z = 5$ を満たすすべての x, y, z について

　$ax^2 + by + cz = 3x + 9$ が成り立つような定数 a, b, c の値を求めよ。

(4) $a + b + c + d = 0$, $a + 2b + 3c + 4d = 5$, $a - 2b - c - 3d = 9$ であるとき a, c, d を b で表せ。

問題 1.18.2 [*51]

　正の整数 a, b は $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{4}$ と不等式 $a \leqq b \ \cdots(*)$ を満たす。

(1) $(*)$を用いて $a \leqq 8$ を示せ。

(2) 条件を満たす $(a\,,\,b)$ をすべて求めよ。

[*49] (1) $c = -1$, a , b は任意　(2) 略　(3) $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$

[*50] (1) 最大値 4 , $a = 2$, $b = 0$　(2) 順に $14b^2 - 28b + 17$, 3 , $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$

　(3) $a = 0$, $b = 1$, $c = -15$　(4) $a = -\dfrac{1}{2}(3b + 19)$, $c = \dfrac{1}{2}(5b + 47)$, $d = -2b - 14$

[*51] (1) 略　(2) $(5\,,\,20)$, $(6\,,\,12)$, $(8\,,\,8)$

1.19　等式・不等式の証明

等式 $A = B$、不等式 $A > B$ などの証明は 1.5 ① の方法、すなわち差 $A - B$ を考えるのが原則である。

① 等式の証明

$A - B$ を計算して $= 0$ になることをいう。特に条件式があるときは、文字消去などを実行する。

② 不等式の証明

これも $A - B$ を計算して 0 と比較する。このとき以下の実数の基本性質を利用する。やはり 1.5 の繰り返しになるが再度確認しておく。

i）$(\text{実数})^2 \geqq 0$ で、特に 0 でない実数 x について $x^2 > 0$

ii）同符号の数の積は正、異符号の数の積は負である。

1.20　真理集合と必要条件・十分条件

1.21　命題の証明

広い意味で言えば、問題を解くことはすべて命題の証明に他ならない。例えば「p のときどうなるかを求めよ。」という問いにおいて得られる答え q は条件 p であるための一つの必要条件であり「p ならば q」という命題を証明したことになる。このように数学の解答には至るところ命題の証明が潜んでいるのだが、ここでは特に名前のある証明法について確認したい。

① 対偶証明法

真理集合(1.20 参照)を用いて確認できることであるが、命題「p ならば q」とその対偶命　題「q でないならば p でない」の真偽は常に一致する。この性質を利用して「p ならば q」　の真偽を考えるのが、対偶証明法である。

② 背理法

背理法とは命題「p ならば q」が真であることを証明する方法の一つである。具体的には p であって q でないとすると不合理であることを示す。(そうだとすれば p と $\overline{q}$ は両立せず、p であるならば qということになる。) q という結果は起こりえないことを示す上で有効な方法である。

③ 数学的帰納法

例えば「$2^n > n^2$」は n の値に対して真偽が定まる命題であり、$\mathrm{P}(n)$ などと表される。$\mathrm{P}(n)$「$2^n > n^2$」において $\mathrm{P}(1)$「$2^1 > 1^2$」は真、$\mathrm{P}(2)$「$2^2 > 2^2$」は偽である。以下 $\mathrm{P}(3)$ $\mathrm{P}(4)\,, \cdots$ のそれぞれも、真か偽のいずれかになる。まとめて $\mathrm{P}(n)$ と表すのであるが、$\mathrm{P}(1)\,, \mathrm{P}(2)\,, \mathrm{P}(3)\,, \cdots$ は一つ一つ異なる命題の列と考えるべきである。

この命題の列について次の 2 つが成り立つならば、$\mathrm{P}(1)\,, \mathrm{P}(2)\,, \mathrm{P}(3)\,, \cdots$ のどの命題もすべて真である。

(I) すべての k について「$\mathrm{P}(k)$ が真ならば $\mathrm{P}(k+1)$ も真」である。

(真である命題 $\mathrm{P}(k)$ の次にある命題 $\mathrm{P}(k+1)$ は例外なく真。)

(II) $\mathrm{P}(1)$ は真。

この (I)(II) を示す証明法が数学的帰納法である。

注) (I)(II) についてはいろいろな組み合わせがある。

問題 1.21.1 *52

(1) 命題「$x^2 < 0$ ならば x は実数でない」が真であることを、① 対偶証明法 , ② 背理法、の二通りの方法で示せ。

(2) 以下の 2 つの命題の真偽を言え。

命題 A「$x \fallingdotseq 5$ または $y \fallingdotseq 3$ ならば $xy \fallingdotseq 15$」

命題 B「$xy \fallingdotseq 15$ ならば $x \fallingdotseq 5$ または $y \fallingdotseq 3$」

*52 (1) 略 (2) A は偽、B は真

問題 1.21.2 *53

(1) x, y は正の数とする。$P = x + y$, $Q = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ について以下の問いに答えよ。

(i) $P + Q \geqq 4$ を示せ。

(ii) P, Q の少なくとも一方は 2 以上であることを示せ。(背理法、対偶証明法の二通りある。)

(2) a, b, c はいずれも 0 でない実数とする。(1)と同様にして x の 2 次方程式

$$ax^2 + 2bx + c = 0\ ,\ bx^2 + 2cx + a = 0\ ,\ cx^2 + 2ax + b = 0$$

の少なくとも一つは実数解をもつことを示せ。

問題 1.21.3 *54

(1) すべての正整数 n に対して命題 $\mathrm{P}(n)$「$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$」が真であることを示せ。

(2) 5 以上のすべての正整数 n に対して命題 $\mathrm{Q}(n)$「$2^n > n^2$」が真であることを示せ。

(3) $\alpha + \beta = x$, $\alpha\beta = y$ とする。すべての正整数 n に対して命題 $\mathrm{R}(n)$「$\alpha^n + \beta^n$ は x, y の整式で表される」が真であることを示せ。

(注) 整式とは数と文字についての加・減・乗だけから得られる式のこと。

問題 1.21.4 *55

数列 $\{a_n\}\,(n \geqq 1)$ について $a_1 = 1$ であり、2 以上のすべての n に対して $(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n)^2 = n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots\cdots + a_n^2)$ が成り立つとする。

(1) a_2, a_3 の値を求めよ。また一般項 a_n を予想せよ。

(2) (1)の予想が正しいことを数学的帰納法で示せ。

---

*53 略

*54 略

*55 (1) $a_2 = a_3 = 1$, $a_n = 1$ (2) 略