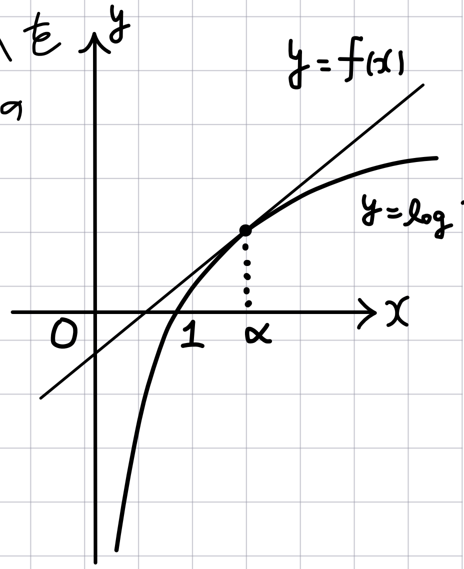
n数についての相加・相乗平均の関係の証明

この証明方法としては数学的帰納法を用いるものなどがあるが、ここでは対数関数のグラフの性質を利用してみたい。



まずは準備の一題。

[問題]

(1) $y=\log x$ の $(\alpha, \log \alpha)$ における接線の方程式を $y=f(x)$ とする。$f(x)$ を求めよ。

(2) $x>0$ のとき $f(x) \geqq \log x$ であることを示せ。

解)

(1) $y=\log x$, $y'=\frac{1}{x}$ より接線の傾きは $\frac{1}{\alpha}$

よって接線は $y=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)+\log \alpha$

$\therefore f(x)=\frac{1}{\alpha}x-1+\log \alpha$

(2) $g(x)=f(x)-\log x=\frac{x}{\alpha}-1+\log \alpha-\log x$ とおく。

$g'(x)=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{x}=\frac{x-\alpha}{\alpha x}$

x	0		α		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

$g(x)$ の増減は右のようになり

$g(\alpha)=0$ なので

$x>0$ のとき $g(x)=f(x)-\log x \geqq 0$ $\therefore f(x) \geqq \log x$

[定理]

$n(\geqq 2)$ 個の正数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ について相加平均は相乗平均以上である。すなわち

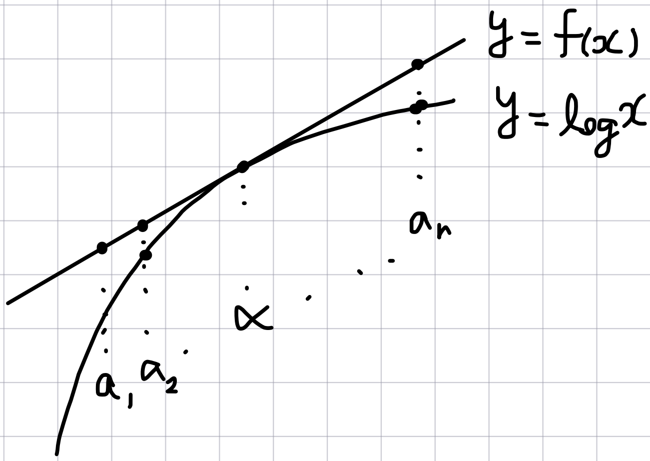
$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$$

が成り立つ。また等号成立条件は

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$$

証明) $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \alpha$ とおく。また $y=\log x$ のグラフの $(\alpha, \log\alpha)$ における接線の方程式を $y=f(x)$ とする。

[問題](2) より



$$f(a_i) \geqq \log a_i \quad \cdots\cdots ①$$

$$(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

が成り立ち、これから

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} \log a_i$$

$$\therefore \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log a_i \quad \cdots\cdots ②$$

② の右辺 $= \dfrac{1}{n}(\log a_1 + \log a_2 + \cdots\cdots + \log a_n)$

$$= \frac{1}{n}\log a_1 a_2 \cdots a_n = \log \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

また $f(x)$ は x の1次関数(→[問題](1)参照)であり、$f(x) = px + q$ として

② の左辺 $= \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(pa_i + q) = p\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \dfrac{1}{n} \times nq$

$=p\alpha+q=f(\alpha)=\log\alpha=\log\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

したがって②は

$$\log\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqq\log\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

となるが $y=\log x$ は単調増加である。

$$\therefore\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

ここで等号成立条件は②が等式になることであるが、それはさらに①がすべての i $(i=1,2,3,\cdots,n)$ に対して等式であることと同値である。すなわち

$$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n\ \left(=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)$$

注）ここでは自然対数を用いたが、底は e でなくてもよい。例えば常用対数 $y=\log_{10}x$ を用いても同様の証明になる。

2012.12.11

iPad mini Note Anytime