column8

○大学入試で見掛けるやや難しい積分計算

いつもと違って今回は公式から。特に(D)は覚えておきたい。

(A) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$

(B) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$

なお一般には以下のようになるが、特に $a<0$ のときは定義域に注意する必要がある。

(C) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$

(D) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$

(問題 1)

(1) 任意の実数 x について $x+\sqrt{x^2+1}>0$ であることを示せ。

(2) 上の関係式(A)〜(D)を、右辺を微分することで証明せよ。

(問題 2)

(1) $x=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$ $(t>0)$ として $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算せよ。

(2) $x=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$ として $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ を計算せよ。

(3) $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ について $f'(x)=\boxed{\text{ア}}$ である。

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \boxed{\text{イ}} f'(x)dx$ とするとき、$\boxed{\text{イ}}$ を $f(x)$ で表すと $\boxed{\text{ウ}}$ となる。これから $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \boxed{\text{エ}}$ がわかる。

(ii) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \boxed{\text{オ}} f'(x)dx$ とするとき、$\boxed{\text{オ}}$ を $f(x)$ で表すと $\boxed{\text{カ}}$ となる。これから $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \boxed{\text{キ}}$ がわかる。

(4) $x=\tan\theta$ として $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ を計算せよ。

(問題 3)

定義域を $x^2+a>0$ である x の集合として以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$ の導関数を求めよ。

(2) $I=\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx$, $J=\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$ とする。部分積分を用いて I, J の関係式をつくれ。

(問題 4)

双曲線 $C: x^2-y^2=-1$ の焦点のうち y 座標が正であるものを P とする。P を通って x 軸に平行な直線と C の囲む部分の面積を求めよ。

(問題 4) までの解答

(問題 1)

(1) $x \geqq 0$ ならば $x+\sqrt{x^2+1}>0$

また $x<0$ ならば $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|=-x$ であり $x+\sqrt{x^2+1}>0$

(2) 略

(問題 2)

(1) $x=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$ ($t>0$) $\cdots$① のとき

$$x^2+1=\left\{\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}^2+1=\frac{1}{4}\left(t^2+\frac{1}{t^2}+2\right)=\left\{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right\}^2$$

であり $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\left\{\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\right\}^2}=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$ $\cdots$②

さらに $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ であり、$x=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$ ($t>0$) として

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\int\frac{1}{4}\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2+2\log t-\frac{1}{2t^2}\right)+C=\frac{1}{8}\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{2}\log t+C$$

ここで①,②,①+②から

$$t-\frac{1}{t}=2x\ ,\ t+\frac{1}{t}=2\sqrt{x^2+1}\ ,\ t=x+\sqrt{x^2+1}$$

$$\therefore\ \int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{8}\cdot2\sqrt{x^2+1}\cdot2x+\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$$

注 1) ①から $t^2-2xt-1=0$ で、これを解いて $t=x+\sqrt{x^2+1}$ である。またこれから

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{-x+\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})}=-x+\sqrt{x^2+1}$$

となり、最後はこれらを代入してもよい。

注 2) (1)(2)とも x , t の対応は一対一である。これはグラフを考えることですぐに分かる。

(2) $x=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$ $\cdots$③ のとき

$$x^2+1=\frac{1}{4}(e^t-e^{-t})^2+1=\frac{1}{4}(e^{2t}+2+e^{-2t})=\frac{1}{4}(e^t+e^{-t})^2$$

であり $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})$ $\cdots$④

さらに $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})$ なので③の置換によって

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int 1\,dt=t+C$$

ここで③+④から $e^t=x+\sqrt{x^2+1}$, $t=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ である。

$$\therefore\ \int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$$

注) やはり③のとき $(e^t)^2-2xe^t-1=0$ であってこれから $e^t=x+\sqrt{x^2+1}$ としてもよい。

(3) ア $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$ イ $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ ウ $\dfrac{1}{f(x)}$

エ $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$ オ $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ カ $\dfrac{1}{4f(x)}\left(f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\right)^2$

キ $\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$

(i) (問題 1)でみたように、任意の実数 x について $x+\sqrt{x^2+1}>0$ である。したがって

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}dx\\ &= \int\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)dx = \int\frac{1}{u}du \qquad f(x)=u\\ &= \log|u|+C = \log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C\\ &= \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C\end{aligned}$$

(ii) やはり任意の x について $x+\sqrt{x^2+1}>0$ である。

また $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ について

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{-x+\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})}=-x+\sqrt{x^2+1}$$

より $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}=2\sqrt{x^2+1}$, $f(x)-\dfrac{1}{f(x)}=2x$ である。したがって

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+1}\,dx &= \int\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}dx\\ &= \int\left\{\frac{1}{2}\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)\right\}^2\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)dx \qquad f(x)=u\\ &= \int\frac{1}{4u}\left(u+\frac{1}{u}\right)^2du\\ &= \frac{1}{4}\int\left(u+\frac{2}{u}+\frac{1}{u^3}\right)du = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}u^2+2\log|u|-\frac{1}{2u^2}\right)+C\\ &= \frac{1}{8}\left(u+\frac{1}{u}\right)\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{1}{2}\log u+C\\ &= \frac{1}{8}\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)\left(f(x)-\frac{1}{f(x)}\right)+\frac{1}{2}\log f(x)+C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C\end{aligned}$$

(4) $x=\tan\theta$ として

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot(\tan\theta)'d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta \qquad \sin\theta=u\\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{1-u^2}du\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du = \frac{1}{2}\Big[\log|1+u|-\log|1-u|\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &= \log(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

(問題 3)

(1) $y=\sqrt{x^2+a}$ は $y=\sqrt{u}$, $u=x^2+a$ を合成したものなので

$$\left(\sqrt{x^2+a}\right)'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$$

さらに $y=\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$ は $y=\log|u|$, $u=x+\sqrt{x^2+a}$ を合成したもので

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

(2)
$$I = \int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \left(\sqrt{x^2+a} - \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + \int \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - I + aJ$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}J$$

注）$F(x) = \int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt$ とすると「$x>1$ で $F'(x)=\sqrt{x^2-1}$」かつ「$x \geqq 1$ で $F(x)$ は連続」かつ「$F(1)=0$」である。一方 $G(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$ についても

① $x>1$ で $G'(x)=\sqrt{x^2-1}$　　② $x \geqq 1$ で $G(x)$ は連続　　③ $G(1)=0$

である。すなわちこの 2 つの関数は $x \geqq 1$ において同一であり、例えば

$$\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]_1^2$$

などと計算される。

なお $G(x)$ の $x=1$ においての微分可能性は簡単ではない。実際合成関数の微分公式では $x=1$ において $y=\sqrt{x^2-1}$ が微分可能ではなく、説明出来ない。今触れたように、定積分を求める場合は関係なく、またかなり難しい話なのであまりこだわらない方がよいのかもしれないが、一応説明しておくと、$G(x)$ は $x=1$ で微分可能である。合成関数の微分公式は使えず $\lim_{x\to 1+0} \frac{G(x)-G(1)}{x-1}$ を考えることになるのだが、①②および平均値の定理からこの極限値が 0 であることが求まる。（したがって $x \geqq 1$ で $G'(x)=\sqrt{x^2-1}$ となる。また当然のことながら $F(x)$ についても $x \geqq 1$ で $F'(x)=\sqrt{x^2-1}$ であるが、こちらは $x>1$, $x=1$ を分けずに説明される。）

(問題 4)

$y=\sqrt{x^2+1}$ と $y=\sqrt{2}$ の囲む面積 S が求めるもの。2 曲線の交点の x 座標は ± 1 なので

$$S = \int_{-1}^1 \left\{\sqrt{2}-\sqrt{x^2+1}\right\}dx = \left[\sqrt{2}x - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_{-1}^1$$

$$= \sqrt{2} - \log\left(1+\sqrt{2}\right)$$

では最後に 2011 年度に東京大学の理科類の入試で出題された（正確にいうと答を出すために必要になる）積分計算を挙げておこう。

（問題）

$$I=\int_b^1 \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx=\boxed{}$$ （ただし a, b は正の数）　　　（2011 年度東大入試より）

（方法 1）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ と $\displaystyle\int \frac{1}{\sin\theta}\,d\theta$ はどちらも常識にしておきたい計算だが、その類題として解くことが出来る。すなわち $x=a\tan\theta$ とした置換積分を用いる方法がある。

鋭角 α, β を $a\tan\alpha=b$, $a\tan\beta=1$ を満たす角とする。また $x=a\tan\theta$ について $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{a}{\cos^2\theta}$ であり、この置換をすることで

$$I=\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}}{a\tan\theta}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_\alpha^\beta \frac{a}{a\tan\theta\cos\theta}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_\alpha^\beta \frac{a}{\sin\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \frac{a\sin\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta=\int_\alpha^\beta \frac{a}{(\cos^2\theta-1)\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta)d\theta$$

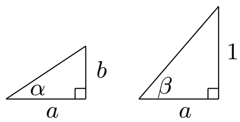
したがってさらに $\cos\theta=u$ として

$$I=\int_{\cos\alpha}^{\cos\beta} \frac{a}{(u^2-1)u^2}\,du=\int_{\cos\alpha}^{\cos\beta} a\Big(\frac{1}{u^2-1}-\frac{1}{u^2}\Big)du$$

$$=\int_{\cos\alpha}^{\cos\beta} a\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\Big)-\frac{1}{u^2}\Big\}du=a\Big[\frac{1}{2}\log|\,u-1\,|-\frac{1}{2}\log|\,u+1\,|+\frac{1}{u}\Big]_{\cos\alpha}^{\cos\beta}$$

ところで $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{a}$ より $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\cos\beta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ である。



$$\therefore\ \ I=a\Big\{\frac{1}{2}\log\Big|\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}-1\Big|-\frac{1}{2}\log\Big|\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+1\Big|+\frac{1}{a}\sqrt{a^2+1}$$
$$-\frac{1}{2}\log\Big|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-1\Big|+\frac{1}{2}\log\Big|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+1\Big|-\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\Big\}$$
$$=a\Big\{\frac{1}{2}\log|\,a-\sqrt{a^2+1}\,|-\frac{1}{2}\log|\,a+\sqrt{a^2+1}\,|+\frac{1}{a}\sqrt{a^2+1}$$
$$-\frac{1}{2}\log|\,a-\sqrt{a^2+b^2}\,|+\frac{1}{2}\log|\,a+\sqrt{a^2+b^2}\,|-\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\Big\}$$
$$=\frac{a}{2}\Big\{\log\big(\sqrt{a^2+1}-a\big)-\log\big(\sqrt{a^2+1}+a\big)-\log\big(\sqrt{a^2+b^2}-a\big)$$
$$+\log\big(\sqrt{a^2+b^2}+a\big)\Big\}+\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2+b^2}$$

（方法 2）$\sqrt{x^2+a^2}=t$ すなわち $x=\sqrt{t^2-a^2}$（$t>a$）とする置換積分を用いる。

$x=\sqrt{t^2-a^2}$（$t>a$）について $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-a^2}}$ であり

$$I=\int_{\sqrt{b^2+a^2}}^{\sqrt{1+a^2}} \frac{t}{\sqrt{t^2-a^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-a^2}}\,dt=\int_{\sqrt{b^2+a^2}}^{\sqrt{1+a^2}} \frac{t^2}{t^2-a^2}\,dt$$

また $\dfrac{t^2}{t^2-a^2}=1+\dfrac{a^2}{t^2-a^2}=1+\dfrac{a}{2}\Big(\dfrac{1}{t-a}-\dfrac{1}{t+a}\Big)$ である。

$$\therefore\ \ I=\Big[t+\frac{a}{2}\big\{\log(t-a)-\log(t+a)\big\}\Big]_{\sqrt{b^2+a^2}}^{\sqrt{1+a^2}}$$
$$=\sqrt{1+a^2}-\sqrt{b^2+a^2}+\frac{a}{2}\Big\{\log\big(\sqrt{1+a^2}-a\big)-\log\big(\sqrt{1+a^2}+a\big)$$
$$-\log\big(\sqrt{b^2+a^2}-a\big)+\log\big(\sqrt{b^2+a^2}+a\big)\Big\}$$

（方法 3）最後に $\dfrac{a}{x}=t$ すなわち $x=\dfrac{a}{t}$ とする置換積分と部分積分、さらには公式(B)を用いた計算を示しておく。$x=\dfrac{a}{t}$ について $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{a}{t^2}$ であり

$$
\begin{aligned}
I&=\int_b^1\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}\,dx=\int_{\frac{a}{b}}^{a}\sqrt{1+t^2}\cdot\left(-\frac{a}{t^2}\right)dt=\left[\frac{a}{t}\sqrt{1+t^2}\right]_{\frac{a}{b}}^{a}-\int_{\frac{a}{b}}^{a}\frac{a}{t}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\\
&=\sqrt{1+a^2}-b\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}-a\int_a^{\frac{a}{b}}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt\\
&=\sqrt{1+a^2}-b\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}-a\Big[\log\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)\Big]_{\frac{a}{b}}^{a}\\
&=\sqrt{1+a^2}-\sqrt{b^2+a^2}-a\left\{\log\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)-\log\left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}+\frac{a}{b}\right)\right\}\\
&=\sqrt{1+a^2}-\sqrt{b^2+a^2}-a\left\{\log\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)-\log\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{b}\right)\right\}\\
&=\sqrt{1+a^2}-\sqrt{b^2+a^2}-a\left\{\log\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)-\log\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)+\log b\right\}
\end{aligned}
$$

個人的な好みでいうと（方法 3）なのだが、公式(B)あるいは(D)が頭に入っていることが前提である。なお受験生にとって無理がないのは(方法 2)で、練習になるのは(方法 1)である。結局それぞれの方法を理解しておくのが望ましい。

2011.7.14（木）