column7

○ 2009 年度センター試験数学の間違いについて。

例によって問題から。

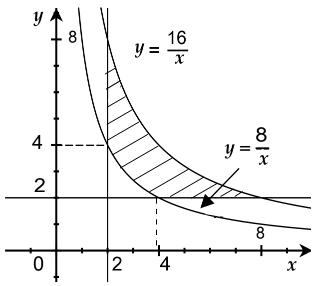
> 2009 年度センター試験数学Ⅱ・B 第 1 問［1］
> $x \geqq 2$, $y \geqq 2$, $8 \leqq xy \leqq 16$ のとき、$z = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y$ の最大値を求めよう。
> $s = \log_2 x$, $t = \log_2 y$ とおくと、s, t, $s+t$ のとりうる値の範囲はそれぞれ
> $s \geqq \boxed{\text{ア}}$, $t \geqq \boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}} \leqq s+t \leqq \boxed{\text{ウ}}$
> となる。(以下略)

最初に私がこの問題を解いたとき、センター試験の問題でありながら随分と時間が掛かった記憶がある。理由は簡単で、導き出した答が空欄にそのまま入らなかったからだ。上の問題は二次試験の問題としてもよく見掛ける、いわゆる二変数関数の値域を問うもので、例えば次のように言い換えることが出来る。

> (問題 A)
> x, y が $x \geqq 2$, $y \geqq 2$, $8 \leqq xy \leqq 16$ を満たして変化するとき
> (1) $s = \log_2 x$ のとりうる値の範囲を求めよ。
> (2) $t = \log_2 y$ のとりうる値の範囲を求めよ。
> (3) $u = \log_2 x + \log_2 y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

この問題の(1)の解答として $s \geqq 1$ とすると、これは間違いなく減点される。$y \geqq 2$ かつ $xy \leqq 16$ より、例えば $x = 64$ は条件に合う x の値ではなく、したがって $s = \log_2 x$ が 6 $(= \log_2 64)$という値を取ることはあり得ないのだ。

さて正しい答は条件を満たす (x, y) の存在範囲を作図することでわかる。具体的には右図のような領域になるので x のとりうる値の範囲は $2 \leqq x \leqq 8$ であり $s = \log_2 x$ の値域 $1 \leqq s \leqq 3$ が求まる。すなわち(1)の正しい答は $1 \leqq s \leqq 3$ であって、センター試験での空欄設定が $s \geqq \boxed{\text{ア}}$ となっていたのは明らかなミスである。



それにしてもこの出題について二年前、ミスを指摘する声は全くなかった。何故だろうか。

その理由は二つあるように思われる。まず一点目。この問題の大きな流れ(z の最大値を求めることが最終目標)の中でいうと、最初の不等式が $1 \leqq s \leqq 3$ でなく $s \geqq 1$ であっても大勢に影響はないこと。そして二点目。指導する立場にあり、かつ言葉を正確に使うべきだと考える人がほとんどいなかったこと。

実はこの問題のミスは非常に些細な部分にある。すなわち「それぞれ」という言葉の使い方だ。実際に出題された問題文の位置に「それぞれ」という言葉が置かれていると t, $s+t$ とは切り離して s を考えなければいけなくなるので、空欄設定にミスが生じることになる。かといって「そ

れぞれ」を用いないで、条件を満たす (x, y) から得られる (s, t) の存在領域を表す不等式は〜という表現では難しいと作問者は判断したのだろう。(良心的に解釈すればだが。)

文句を言うだけでは建設的ではないので、最後にどのような表現にすべきであったのかを指摘しておきたい。一つの方法は空欄設定を変えて s, t の範囲が 1 以上 3 以下と答えられるようにすることである。しかしこれでは内容が難しくなり、センター試験の問題としては適当ではないだろう。各設問の最初には答を出しやすい問いを持ってくるのがセンター数学の定石であるが、領域を作図しないとすぐには答がわからないような問題から入るのは、正にこの定石から外れてしまうことになる。というわけで、やはり空欄設定を変えずに済むように、問題文に手を加えるのが良さそうだ。例えば以下のような言い方にすれば全く問題はない。

> $x \geqq 2 \cdots ①$, $y \geqq 2 \cdots ②$, $8 \leqq xy \leqq 16 \cdots ③$ のとき、$z = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y$ の最大値を求めよう。
>
> $s = \log_2 x$, $t = \log_2 y$ とおくと、①を満たす x について s のとりうる値の範囲は $s \geqq \boxed{\text{ア}}$ である。また②を満たす y についての t と③を満たす x, y についての $s+t$ のとりうる値の範囲はそれぞれ $t \geqq \boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}} \leqq s+t \leqq \boxed{\text{ウ}}$ となる。(以下略)

若干長くなり、また表現もくどくなるが、問題として間違っているよりは遥かに良い。確かに問題が単純になってしまうことは面白くない気もするが、センター試験の問題である以上、優先すべきは他の要素である。

2011.1.30 (日)