column6

○出題者はどんな解き方を想定しているのだろうか。

例によって問題から。

2007 年度慶応大学医学部

$\boxed{1}$（1）xy 平面上の曲線 $5x^2+2\sqrt{3}xy+7y^2=16$ 上の点は原点を中心とする 30° の回転移動によって、楕円 $\dfrac{x^2}{\boxed{（あ）}}+\dfrac{y^2}{\boxed{（い）}}=1$ 上の点に移る。

$\boxed{3}$　a を実数とし $f(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}-a\cos x\right|dx$ とする。$\sin x=y$ とおくと、$f(a)=\displaystyle\int_0^c |g(y)-a|dy$ となる。

（1）$c=\boxed{（あ）}$, $g(y)=\boxed{（い）}$ である。

（2）$a\leqq 0$ のとき $f(a)=\boxed{（う）}$, $a\geqq 1$ のとき $f(a)=\boxed{（え）}$, $0<a<1$ のとき $f(a)=\boxed{（お）}$ である。

（3）$f(a)$ は $a=\boxed{（か）}$ のとき最小となり、最小値は $\boxed{（き）}$ である。

$\boxed{1}$(1)はよくありそうな 1 次変換（回転）の問題である。記述式であれば回転行列を用いて答をまとめなければならないのだろうが、ここは穴埋め式である。そして問題文には 30° 回転すると長軸、短軸が x, y 軸上にくると書いてある(勿論そのものズバリが書かれているわけではないが、すぐに読み取れる)ので、元の楕円の軸がどこにあるかがわかってしまう。すなわち問題文は $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$ 上に軸があると教えてくれているのだ。ここではこれを使わない手はないだろう。$y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ と元の曲線との交点(の一つ)は $(\sqrt{3}, -1)$ であるので、$\boxed{（あ）}$ には $(\sqrt{3})^2+1^2=4$ が、また $y=\sqrt{3}x$ との交点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ を導いて $\boxed{（い）}$ には $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2=2$ が、それぞれ入ることが求まる。ちょっとずるい解き方のような気もするが、これで勿論点になってしまう。

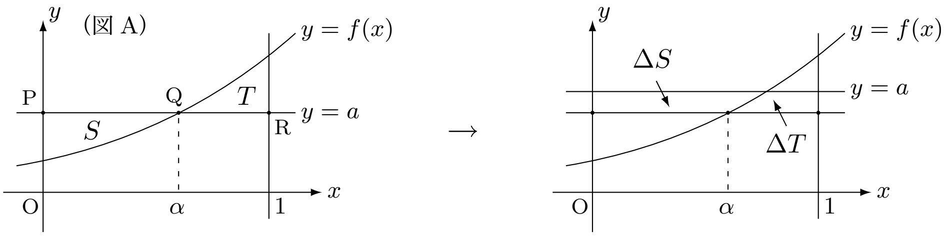
ほとんど穴埋め式なのが唯一の救いであるが、それでも慶応大学医学部の入試問題のセットは内容といい量といい、制限時間 100 分ではかなり忙しくて、大変である(ちょっと前までは 90 分でさらに大変だった)。まさかこのような、問題の意図するところを逆手に取った解き方、が出来るかどうかを試そうとしたわけではないのだろうが、それでも要領の良い受験生は有利だったに違いない。

実はこの年度についてはもう一題、裏技的な解き方が可能な問題があった。それが$\boxed{3}$(3)である。(2)まではきちんと計算をして答を出さないといけない。そしてその結果を微分して増減を調べるのが通常の(3)の解答である。しかし解いてみた人はわかっていると思うが、かなり複雑な計算になるので、よほどうまく処理しないと時間ばかり使うことになってしまう。

さてその裏技的解法であるが、ここでは、いわゆる「はみ出し削り取り論法」を用いると、どのような a に対して $f(a)$ が最小になるかが、簡単にわかる。(先に説明した$\boxed{1}$の解き方に較べれば、より数学的な方法であり「裏技」ではなく「裏技的」としておく。)

例えばグラフが以下の図 A のような位置関係になっている場合 $\int_0^1 |f(x)-a|dx$ は 2 つの面積の和 $S+T$ になるのだが、直線 $y=a$ を上下したときにこの面積の和が増加するか、減少するかはそれぞれ $S\,,T$ がどれだけ変化したかで決まってくる。

具体的に説明してみよう。直線 $y=a$ が図 A の位置よりも少し上に上がると S は増加して T は減少する。この S の増加分を $\Delta S\ (>0)$, T の減少分を $\Delta T\ (>0)$ としたとき、$\Delta S > \Delta T$ ならば面積の和 $S+T$ は増加しているし、逆に $\Delta S < \Delta T$ ならば $S+T$ は減少している。そして、このように ΔS と ΔT の大小を考えて面積の和の増減を論ずる方法が、「はみ出し削り取り論法」である。



いま、上の図 A においては 2 つの線分の長さについて PQ $\geqq$ QR である。このようなときは直線 $y=a$ を上に上げると $\Delta S > \Delta T$ となり、$S+T$ は増加する。また逆に PQ $\leqq$ QS であるときも直線 $y=a$ を下げると、S の減少分 $\Delta S\ (>0)$ と T の増加分 $\Delta T\ (>0)$ について $\Delta S < \Delta T$ が成り立つので、やはり $S+T$ は増加する。(各自図を描いて確認せよ。) よって $S+T$ は PQ $=$ QR のとき最小になることがわかる。

では$\boxed{3}$(3)の解答である。$\sin x = y$ という置換で $f(a)=\int_0^1 \left|\dfrac{2y}{1+y^2}-a\right|dy$ となるので $z=g(y)=\dfrac{2y}{1+y^2}$ と $z=a$ について、図 A と同じように $S+T$ を考えることになる。ここで$z=g(y)$ は $0 \leqq y \leqq 1$ において単調増加であり、グラフは $(0\,,0)$ と $(1\,,1)$ をつなぐ曲線である。当然のことながら $a \leqq 0\,,a \geqq 1$ の場合も問題であるが、面積を考えると増減はすぐにわかるので、$0 \leqq a \leqq 1$ での増減がポイントである。そしてその範囲では、既に説明した「はみ出し削り取り論法」により、$f(a)$ が最小になるのは $z=g(y)$ と $z=a$ の交点の y 座標が $\dfrac{1}{2}$ のときとわかる。すなわち求める a の値は $a=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{5}$ である。(なお最小値はこの a の値を(2)で求めた $f(a)$ に代入すれば求まる。)

今回は慶応大学の問題を取り上げたが、センター試験も含め、客観式テストではあれっ?と思う解法が可能である問題がよく見受けられる。数学の試験だから純粋に数学的な力のみを試すものでなければならない、とは私は思わないが、例えば$\boxed{1}$のような、どうみても意図に沿わない解法が可能になる出題は、校正段階で表現を変えるなどの気配りをして欲しいものである。

2010.12.15 (水)