

column5

○ 3次関数の極値の求め方

ありふれた次の問題。

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x \text{ の極値を求めよ。}$$

これについて、いろいろな参考書の解答をみると、整式の割り算を用いたものが多い。すなわち

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5, f(x) = f'(x)\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right) + \frac{52}{9}x - \frac{10}{9}$$

であり、後者を用いて $x = \frac{2 \pm \sqrt{19}}{3}$ を $f(x)$ に代入した値がわりと簡単に求まるという方法である。

これはこれで直接的な代入計算に比べれば簡単なのだが、割り算の段階で分数計算になることが多く、このような計算を鬱陶しく感じる私のような解答者には、まだまだ大変と思うところもある。何かもっと巧い方法がないのだろうか、以前から考えているが、例えばこんな解き方はどうだろうか。(平方完成に慣れていればこちらの方が簡単な気がするのだが・・・)

(解答)

$$f'(x) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{19}{3} \text{ を積分して、さらに } f(0) = 0 \text{ より } f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)^3 - \frac{19}{3}x + \frac{8}{27}$$

これに $\alpha = \frac{2 + \sqrt{19}}{3}$ を代入して極小値は

$$f(\alpha) = \left(\frac{\sqrt{19}}{3}\right)^3 - \frac{19}{3} \cdot \frac{2 + \sqrt{19}}{3} + \frac{8}{27} = \frac{-106 - 38\sqrt{19}}{27}$$

同様に極大値は $\beta = \frac{2 - \sqrt{19}}{3}$ を代入して $\frac{-106 + 38\sqrt{19}}{27}$ であることがわかる。

さて、どちらの方法が良いかは主観の問題であるが、皆さんはどう感じられるだろうか。

2010.3.18 (木)

◇ web サイト「ky の書架」には他にも例えば大学入試の整数問題過去問などを PDF ファイルで UP してあります。

興味のある方は URL (<http://kynoshoka.com/>) を入力するか、”ky の書架”で google または yahoo 検索をしてサイトにアクセスして下さい。