column5

○ 3 次関数の極値の求め方

ありふれた次の問題。

> $f(x)=x^3-2x^2-5x$ の極値を求めよ。

これについて、いろいろな参考書の解答をみてみると、整式の割り算を用いたものが多い。すなわち

$$f'(x)=3x^2-4x-5\,,\ f(x)=f'(x)\Big(\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}\Big)+\frac{52}{9}x-\frac{10}{9}$$

であり、後者を用いて $x=\dfrac{2\pm\sqrt{19}}{3}$ を $f(x)$ に代入した値がわりと簡単に求まるという方法である。

これはこれで直接的な代入計算に比べれば簡単なのだが、割り算の段階で分数計算になることが多く、このような計算を鬱陶しく感じる私のような解答者には、まだまだ大変と思うところもある。何かもっと巧い方法がないのだろうかと、以前から考えているが、例えばこんな解き方はどうだろうか。(平方完成に慣れていればこちらの方が簡単な気がするのだが・・。)

(解答)

$f'(x)=3\Big(x-\dfrac{2}{3}\Big)^2-\dfrac{19}{3}$ を積分して、さらに $f(0)=0$ より $f(x)=\Big(x-\dfrac{2}{3}\Big)^3-\dfrac{19}{3}x+\dfrac{8}{27}$

これに $\alpha=\dfrac{2+\sqrt{19}}{3}$ を代入して極小値は

$$f(\alpha)=\Big(\frac{\sqrt{19}}{3}\Big)^3-\frac{19}{3}\cdot\frac{2+\sqrt{19}}{3}+\frac{8}{27}=\frac{-106-38\sqrt{19}}{27}$$

同様に極大値は $\beta=\dfrac{2-\sqrt{19}}{3}$ を代入して $\dfrac{-106+38\sqrt{19}}{27}$ であることがわかる。

さて、どちらの方法が良いかは主観の問題であるが、皆さんはどう感じられるだろうか。

2010.3.18 (木)