column4

○それぞれの不等式は対称式ではないのだが・・

例によって問題から。

> 1989 年度京都大学前期
>
> n 個 $(n \geqq 3)$ の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ があり、各 a_i は他の $n-1$ 個の相加平均より大きくはないという。このような $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の組をすべて求めよ。

与えられた条件は n 個の不等式で、具体的に並べてみることから問題を解く作業は始まる。

$$a_1 \leqq \frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{n-1}\,,\ a_2 \leqq \frac{a_1+a_3+a_4+\cdots+a_n}{n-1}$$

$$a_3 \leqq \frac{a_1+a_2+a_4+a_5+\cdots+a_n}{n-1}\,,\ \cdots\cdots$$

であり、これをすべてイメージする中で、ある性質が見えてくればしめたものである。すなわち左辺では a_1 から a_n が 1 回ずつ現れる。また右辺の分子についても a_1 から a_n が 1 回ずつ除かれる仕掛けで、やはり現れる回数がそれぞれについて同じ($n-1$ 回)になっているという事実だ。ここに気付くとある計算をしたくなるのではないか。

(解答)

$$a_i \leqq \frac{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-a_i}{n-1} \quad \cdots①$$

が $i=1, 2, 3, \cdots, n$ について成り立つ。この①に $i=1, 2, 3, \cdots, n$ を代入して得られる n 個の不等式を加えて

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-a_i}{n-1}$$

となるが、さらに $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$ として

$$S \leqq \frac{nS-S}{n-1}\,,\ S \leqq S \quad \cdots②$$

ところで $S=S$ より②の不等式は等式である。よって①の i に $1, 2, 3, \cdots, n$ を代入して得られる n 個の不等式もすべて等式であることがわかる。

$$a_i = \frac{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-a_i}{n-1}\,,\ a_i = \frac{S-a_i}{n-1}$$

すなわち $na_i = S$ が $i=1, 2, 3, \cdots, n$ について成り立つことから

$$na_1 = na_2 = na_3 = \cdots = na_n\,,\ a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$$

が $a_1 \sim a_n$ の条件である。

(答) $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) = (k, k, k, \cdots, k)$ (k は任意の実数)

□ ⍁

解答自体は簡単で n 個の不等式の和を取ろうとしたかどうかだけ[*1]である。一つ一つの不等式は対称式ではないが、加えることで対称式となり、しかも等式が出来上がるという仕掛けに気付けば、なんともあっけなく解けてしまう。

東大は論理重視で京大はセンス・感性重視、とは昔から言われる入試問題の特長である[*2]が、

[*1] 注) 上の解答についてのこと。きっと別解もあって、そうしないと解けないという意味ではない、念のため。
[*2] 単純にそう言い切れるかどうかについては、よくわからない、というのが私の意見。

数式をどう扱うかというセンスが重要なことを本問は教えてくれる。そしてそのような数学的センスは、「ひらめき」という言葉で片付けられることが多い気がするのだが、実は様々な問題・本質に触れる中で少しずつ養われてくるものなのである。

2010.2.12 (金)