column3

○定理・公式のみで片付くわけではなく・・

まずは問題を考えてもらいたい。

> 2008 年度早稲田大学商学部3
>
> 正の整数 n に対して、$f(n)$ と $g(n)$ は 0 以上の整数で、次の条件(i), (ii), (iii)をみたしている。
>
> (i) $g(99)=1$, $g(100)=0$　(ii) $f(100)=1$　(iii) $f(n)+f(n+g(n))=f(n+1)$
>
> このとき、次の設問に答えよ。
>
> (1) $f(99)$ を求めよ。
>
> (2) $g(101)$ を求めよ。
>
> (3) $f(2008)$ を求めよ。

この問題を解くためには特別な定理や公式は必要ない。(だから難しいともいえる？) ここで使われるのは関数のある性質で、それは例えば $2^x=8$ の解が $x=3$ だけであることや、$\sin x=\sin 30^\circ$ の解が $x=30^\circ$ だけでないこととも関係する、重要な概念である。様々な問題を解く中で、本質を理解してゆくことは定理・公式を身に付ける以上に大切といってよいであろう。

(解答)

(1) (iii)の関係式で $n=99$ として $f(99)+f(99+g(99))=f(100)$ であるが、さらに(i)より $g(99)=1$ であり $f(99)+f(100)=f(100)$　$\therefore\ f(99)=0$　$\cdots\cdot$ (答)

(2) 正の整数 n に対して $f(n)$ は 0 以上の整数であり、これと(iii)から

$$f(n+1)-f(n)=f(n+g(n))\geqq 0\ ,\ f(n+1)\geqq f(n)$$

すなわち $f(n)$ は(広義の)単調増加関数であり、$f(99)=0$, $f(100)=1$ より

$$f(1)=f(2)=f(3)=\cdots=f(98)=f(99)=0\ ,\ 1=f(100)\leqq f(101)\leqq f(102)\leqq\cdots$$

である。次に(iii)の関係式において $n=101$ とすると $f(101)+f(101+g(101))=f(102)$ であるが $f(101)\geqq 1$ より

$$f(102)-f(101+g(101))=f(101)\geqq 1\ ,\ f(102)>f(101+g(101))\ \cdots\text{(A)}$$

ここで $g(101)\geqq 1$ とすると (A) は $f(n)$ が単調増加であることに反して不合理である。すなわち $g(101)<1$ であって $g(101)=0$　$\cdots\cdot$ (答)

(3) $n\geqq 100$ のとき $f(n)\geqq 1$ であり

$$f(n+1)-f(n+g(n))=f(n)\geqq 1\ ,\ f(n+1)>f(n+g(n))$$

よって(2)の解答と同様、$f(n)$ の単調増加性から $g(n)=0$ ($n\geqq 100$) がわかる。これと(iii)から $n\geqq 100$ のとき $f(n)+f(n)=f(n+1)$ であり $f(n)=a_n$ として $a_{n+1}=2a_n$ が成り立つ。すなわち $\{a_n\}$ ($n\geqq 100$) は初項が $a_{100}=f(100)=1$ で公比が 2 の等比数列であり

$$f(2008)=a_{2008}=a_{100}\cdot 2^{1908}=2^{1908}\quad\cdots\cdot\ \text{(答)}$$

□ ⧄

「単調増加」と聞いて多くの受験生が連想するのは微分、それも $f'(x)>0$ であろう。しかし $f'(x)>0$ は勿論増加関数の定義ではない。順番としては先に増加関数の定義があるのであって、本来単調性は微分とは関係のない概念なのである。(大学入試では微分の問題として問われるこ

とがほとんどであるが、微分を用いないと説明出来ないという誤解はしてはならない。例えば $y = x + \dfrac{1}{x}$ が $0 < x \leqq 1$ では単調減少で $x \geqq 1$ において単調増加であることは微分を使わなくても証明出来るので、数II範囲の問題として出題されても不思議ではない。）なお当然のことながら本題での $f(n)$ は連続でなく微分可能ではない。

最後に解答について一つだけ補足しておく。関数の単調性は本問の最大のポイントなのだが、実はそこに気付くだけでは駄目なところがこの問題の難しさである。すなわち(iii)の関係式を $f(n+1) - f(n) = f(n+g(n))$，$f(n+1) - f(n+g(n)) = f(n)$ の 2 つの形で用いなければならなくなるのだ。

0 以上の数を 2 つ加えて $f(n+1)$ になるのだから $f(n+1)$ は $f(n)$，$f(n+g(n))$ のどちらよりも小さくないことは当然なのだが、普段紋切り型の典型題しか考えたことのなかった受験生にはとても手に負えない内容であっただろう。（しかも文系の入試問題で・・）

2010.2.5（金）