column2

○ 3 人で駱駝を分けることはできるか

まずは問題から。

> 2005 年度慶応大学総合政策学部1(2)
>
> P 氏は N 頭のらくだを 3 人の息子で分けるように遺言して亡くなった。その遺言によれば N の x 分の 1，y 分の 1，z 分の 1（x，y，z は自然数で $x > y > z$ とする）が息子たちの相続するらくだの数である。ただし、N は x，y，z のいずれの倍数でもない。$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ でないので 3 人が悩んでいると、通りがかりの旅人がよい工夫を思い付いた。旅人のらくだ 1 頭を加え $N+1$ を遺言の率に従って分割すれば、うまく分割でき、1 頭余る。したがって旅人はなんの損得も受けないという案である。3 人は喜んでこの提案を受け入れた。たとえば、$N=11$，$(x, y, z)=(6, 4, 2)$ はこの場合である。さて、ほかにどのような N の値があり得るか。12 以上の N を小さい順に並べると $N=\boxed{}$，$\boxed{}$，$\boxed{}$，$\boxed{}$ である。

何ともいえないほのぼのとしたものを感じさせる問題である。例えば広大な砂漠、そして何頭かの駱駝の傍らで途方に暮れる兄弟の姿が、まるで映画のワンシーンのように頭に浮かんでくるだろう。また旅人の知恵は、持ち馬の競争で負けた方(遅かった方)に財産を与えるという遺言に対してスタート出来ないでいる兄弟に、互いの馬を交換して競争すればよいとアドバイスした旅人の話、を思い出させる。これが受験でなければ、ゆっくりとコーヒーでも飲みながら解法を考えて、実に充実した時間を過ごすことができるに違いないのだが・・。

それにしても入試問題における説明や誘導は時に不親切なものである。ここでも問題文の中に $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ ではないので・・という部分があるが、これは本質の説明になっていない。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\ ,\ x \geqq y \geqq z$$

である正の整数の組が $(x, y, z)=(3, 3, 3), (4, 4, 2), (6, 3, 2)$ であることは頻出事項で、求め方もいえないといけないが、このうちの $(6, 3, 2)$ を使えば駱駝 12 頭について 6 分の 1, 3 分の 1, 2 分の 1 はそれぞれ 2 頭、4 頭、6 頭で、あわせて元の 12 頭になる。(したがって 1 頭を加える必要はない。)それに対して駱駝の頭数が 11 頭だったとするとこれを 6 分の 1, 3 分の 1, 2 分の 1 に分けることは出来ないので、1 頭を加えて 12 頭にするという知恵が必要になる。ここで同様に 6 分の 1, 3 分の 1, 2 分の 1 に分けると加えた 1 頭は余らないが、6 分の 1, 4 分の 1, 2 分の 1 に分けると $2+3+6=11$ で最初の 11 頭になって 1 頭が余る。問題文が触れているのはこの $(6, 4, 2)$ が $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ を満たさないことであるが、ここで説明したとおりで、3 人が分けようとしている駱駝の頭数 N がむしろ本質である。

(解答) 考えるべき条件は以下の 3 つである。

① $\dfrac{N}{x}$, $\dfrac{N}{y}$, $\dfrac{N}{z}$ の少なくとも 1 つは整数でない。[*1]

② $\dfrac{N+1}{x}$, $\dfrac{N+1}{y}$, $\dfrac{N+1}{z}$ はすべて整数である。

[*1] 問題文ではすべてが整数でないとあるが、どれか一つでも整数でない場合に 3 人は悩むことになる。

③ $\dfrac{N+1}{x}+\dfrac{N+1}{y}+\dfrac{N+1}{z}=N\cdots$(A) かつ $x>y>z>0$

ここで③である x,y,z について $z\geqq 3$ とすると $y\geqq 4,x\geqq 5$ であり、$N>4$ について

$$\frac{N+1}{x}+\frac{N+1}{y}+\frac{N+1}{z}\leqq\frac{N+1}{5}+\frac{N+1}{4}+\frac{N+1}{3}=\frac{47N+47}{60}<N\ ^{*2}$$

となり不合理である。よって $z=2$ がわかる。

次に $z=2$ のとき (A) は $\dfrac{N+1}{x}+\dfrac{N+1}{y}=\dfrac{N-1}{2}\cdots$(B) であり、これを $x>y>2$ について考える。やはり $y\geqq 5$ とすると $x\geqq 6$ で $N>7$ のとき

$$\frac{N+1}{x}+\frac{N+1}{y}\leqq\frac{N+1}{6}+\frac{N+1}{5}=\frac{11N+11}{30}<\frac{N-1}{2}$$

となるので y は 3 または 4 である。

(i) $y=3$ のとき (B) は $\dfrac{N+1}{x}+\dfrac{N+1}{3}=\dfrac{N-1}{2}$ で

$$\frac{N+1}{x}=\frac{N-5}{6}\ ,\ 6N+6=xN-5x$$
$$xN-5x-6N=6\ ,\ (x-6)(N-5)=36$$

$N>11,N-5>6$ に留意すると $(x-6,N-5)=(4,9),(3,12),(2,18),(1,36)$ が考えるべき組合せで $(x,N)=(10,14),(9,17),(8,23),(7,41)$ となる。ただしこのうちで最初の組は②を満たさず不適である。

(ii) $y=4$ のとき (B) は $\dfrac{N+1}{x}+\dfrac{N+1}{4}=\dfrac{N-1}{2}$ で

$$\frac{N+1}{x}=\frac{N-3}{4}\ ,\ 4N+4=xN-3x$$
$$xN-3x-4N=4\ ,\ (x-4)(N-3)=16$$

$N>11,N-3>8$ に留意すると $(x-4,N-3)=(1,16)$ であり $(x,N)=(5,19)$ が求まる。

(あとは①,②をチェックしないといけないが、それは皆さんにお任せしたい。)

(答) 順に　17，19，23，41 □⧄

$z=2$ を決定するあたりは「三角形のどの内角についての正接(タンジェント)も整数ならば、最小の内角は 45°」という、有名問題の解答で使われる方法と同じで、覚えておきたい考え方である。さらに同様の方法で y の値を絞ることも出来て、そこまでくれば未知数は x,N の 2 つになり、以下はお馴染みの問題になる。

なおこの問題自体は1の中での(独立した)小問という扱いなのだが、内容はかなり重く、受験生には厳しい出題であったと思われる。

2010.2.1 (月)

*2 $N-\dfrac{47N+47}{60}=\dfrac{13N-47}{60}$ より。