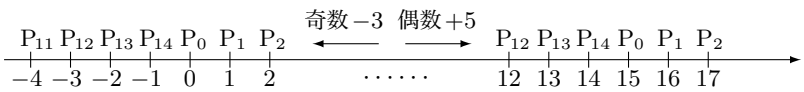
column 10

○ 2021 年度共通テスト数学 I・数学 A 第 4 問(4)の一般化

今年から名称が変わった第一回目の共通テスト、数学 I・数学 A の第 4 問(4)は次のような内容であった。(試験実施日 2021.1.24 sun)

> (問題)
> 円周上に反時計回りに 15 個の点 $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{14}$ があって、この順で並んでいる。最初は P_0 にある石を次の規則で移動させる。
> (規則) さいころを投げて偶数の目が出たら反時計回りに石を 5 個先の点に移動させ、
> 奇数の目が出たら時計回りに 3 個先の点に移動させる。
> この操作を繰り返すとき、石が点 P_i に移動するための最小の操作の回数を $f(i)$ として $f(i)$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, 14$) の最大値と、それを与える i を求めよ。
> 注) この問題文は原文とは異なります。

円周上で点(本題では石)を移動させるというよくあるパターンで、2 周目以降もあったり、時計回り・反時計回りを区別しないといけないので、点の移動を数直線上で考えるのが方針である。



この数直線上では例えば偶数の目が 2 回続いて出た場合、最初原点にあった点は +10 動いて座標は 10 に、また奇数が最初に出た場合には −3 動いて座標は −3 になる。一方でこれらに対応する円上での石の到達点は、前者の場合 P_{10} で、後者では P_{12} である。

この座標の変化と円上の石の到達点の対応は上図のようになる。(整数の並びに対して対応する $P_0 \sim P_{14}$ が循環する。) すなわち一般に偶数が x 回、奇数が y 回出た場合、数直線上で点の座標は $5x - 3y$ になるが、この $5x - 3y$ を 15 で割った余りを i として、円上での石の到達点は P_i である。

さてこの問題についての本試験の誘導は以下であった。

(1) 石が P_1 に移動するための偶数の出る回数 x と奇数の出る回数 y の関係を考えさせる。
　→ 不定方程式 $5x - 3y = 1$

(2) (1)との関連で石が P_8 に移動する x, y を考えさせる。
　→ 不定方程式 $5x - 3y = 8$

(3) 一周すると同じ点に戻ることを用いて, P_8 に移動するためのさいころを投げる回数で、(2)の答とは異なるものを考えさせる。

(4) 上記の問い。(解答群には $P_{10} \sim P_{14}$ の 5 つの点しかなく、これらだけを考えればよい。)

まさに(4)を解くためには(3)がポイントになるのだが、実はこの部分については厳密な考察を避けた問題文になっていて、誘導としては不適切だったように思えるので、きちんと説明をしておきたい。考えるべきは以下である。

(∗) 偶数の回数 x と奇数の回数 y の組 $(x\,,\,y)$ を考える。2 つの移動 $(x_1,\,y_1)\,,\,(x_2,\,y_2)$ に対して石が円上の同一点に到達するための必要十分条件は何か。

これを考えるために、今回の試験でも問題にされたことだが、不定方程式の解法について確認しておこう。不定方程式 $5x-3y=1$ の整数解 $x\,,\,y$ は

$$(x\,,\,y)=(2\,,\,3)+k(3\,,\,5)\ (k\text{ は任意の整数})$$

であるが、これらは直線 $5x-3y=1$ 上の格子点に他ならない。特殊解 $(2\,,\,3)$ は直線の通過点であり、また傾きが $\dfrac{5}{3}$ より、直線上で隣り合う格子点の x 座標の差が 3 となることを考えれば、直感的であろう。そして同様に考えれば $5x-3y=N$ (N はある整数) の整数解 $x\,,\,y$ は

$$(x\,,\,y)=(2N\,,\,3N)+k(3\,,\,5)\ (k\text{ は任意の整数})\ \cdots①$$

であることもすぐにわかる。ここで特殊解 $(x\,,\,y)=(2N\,,\,3N)$ は $5x-3y=1$ の特殊解 $(2\,,\,3)$ のそれぞれを N 倍したものを用いることができる。(この流れはこのタイプの不定方程式の解を求める方法として定番で、今回の共通テスト第 4 問の(1)→(2)でも使われていた。)

では(∗)を考えてみよう。$(x\,,\,y)=(x_1,\,y_1)\,,\,(x_2,\,y_2)$ に対して石の移動が n 周分の違いになるとする。これは数式で表すと $(5x_2-3y_2)-(5x_1-3y_1)=15n\ \cdots②$ が成り立つということである。ここで②は $5(x_2-x_1)-3(y_2-y_1)=15n$ となり $x_2-x_1=X\,,\,y_2-y_1=Y$ として $5X-3Y=15n$ となる。この解は①で $N=15n$ として

$$(X\,,\,Y)=(x_2-x_1,\,y_2-y_1)=(30n\,,\,45n)+k(3\,,\,5)=(3(10n+k)\,,\,5(9n+k))$$

すなわち x_2-x_1 は 3 の倍数で y_2-y_1 は 5 の倍数である。

逆に $x_2-x_1=3m\,,\,y_2-y_1=5n$ ($m\,,\,n$ は整数) ならば

$$5x_2-3y_2-(5x_1-3y_1)=5(x_2-x_1)-3(y_2-y_1)=15(m-n)$$

となり、確かに石の移動は $m-n$ 周分の違いになる。(移動分は $+5$ が 3 回増えると $+15$ に、また -3 が 5 回増えると -15 になるので、こちらは当たり前といえば当たり前。) 以上より(∗)について以下がわかる。

(◇) 2 つの移動 $(x_1,\,y_1)\,,\,(x_2,\,y_2)$ に対して石が円上で同一点に到達する

$\iff$ x_2-x_1 は 3 の倍数かつ y_2-y_1 は 5 の倍数

誘導として不適切と書いたのは ($\Longleftarrow$) はすぐにわかるとしても，($\Longrightarrow$) は正直難しいと思うからだ。まあそれは置いておくとして・・

で、これを用いて最初に提示した問題の解答が得られる。

(方法 1) 誘導を見ると、共通テストの問題の解答として出題者が想定したのはこれだろう。

(i) P_1 への移動の最小の回数 $f(1)$ について。

$5x-3y=1+15n$ (n は任意の整数) をすべて考える必要があるが、(◇)より $5x-3y=1$ の一つの解 $(x\,,\,y)=(2\,,\,3)$ の x に 3 の倍数を足す、または y に 5 の倍数を足すことで、考えるべき他のパターンも得られる。それらについての $x+y$ は $2+3$ よりも大きくなるので、最小の回数 $f(1)$ は 5 である。

(ii) P_2 への移動の最小の回数 $f(2)$ について。

やはり $5x-3y=2$ の一つの解 $(x\,,\,y)=(4\,,\,6)$ から考えればよい。この x から 3 の倍数 3 を、また y から 5 の倍数を引いた $(x\,,\,y)=(1\,,\,1)$ に対しても石は P_2 に移動する。よって

$f(2)=1+1=2$

(iii) 以下これを $P_3 \sim P_{14}$ に対して考える。(本試験の(4)の解答群を見ると $P_{10} \sim P_{14}$ だけでよいのだが・・)

例えば $5x-3y=3 \to (x\,,\,y)=(6\,,\,9) \to (0\,,\,4)$ で $f(3)=4$

$5x-3y=-1 \to (x\,,\,y)=(1\,,\,2)$ で $f(14)=3$

$5x-3y=-2 \to (x\,,\,y)=(2\,,\,4)$ で $f(13)=6$

$5x-3y=-3 \to (x\,,\,y)=(3\,,\,6) \to (0\,,\,1)$ で $f(12)=1$ など。

（答）最大値は 6 で, $i=13$

（方法２）次に別のアプローチで解答をまとめておこう。やはり(◇)の同値関係がポイントになるが、加えて「ディリクレの箱入れ原理（鳩の巣原理)」を使うと綺麗に説明される。

<u>解答</u>　偶数の目が x 回出て、奇数の目が y 回出たときの移動は $(x\,,\,y)$ で表される。ここで異なる 15 組 $(x\,,\,y)=(i\,,\,j)$ $(0 \leqq i \leqq 2\,,\,0 \leqq j \leqq 4)$ $\cdots$③ のどの 2 つについても x 座標の差が 3 の倍数でないか、または y 座標の差が 5 の倍数ではないので、(◇)より③のそれぞれの移動に対して石の到達点はすべて異なるものになる。実際到達点は

$(x\,,\,y)=(0\,,\,0) \to P_0\,,\ (0\,,\,1) \to P_{12}\,,\ (0\,,\,2) \to P_9\,,\ (0\,,\,3) \to P_6\,,\ (0\,,\,4) \to P_3$

$(1\,,\,0) \to P_5\,,\ (1\,,\,1) \to P_2\,,\ (1\,,\,2) \to P_{14}\,,\ (1\,,\,3) \to P_{11}\,,\ (1\,,\,4) \to P_8$

$(2\,,\,0) \to P_{10}\,,\ (2\,,\,1) \to P_7\,,\ (2\,,\,2) \to P_4\,,\ (2\,,\,3) \to P_1\,,\ (2\,,\,4) \to P_{13}$

である。ここで円上の点は 15 個であるので、すべての点への移動が③で表されている。ただし $(x\,,\,y)=(0\,,\,0)$ は考えるべき移動ではないので $x+y$ が最小になる $(3\,,\,0)$ を代わりに使う。(そしてそれらが各点に到達する移動において $x+y$ の最小値を与えることは問題ないだろう。) 以上より石が到達するための移動の回数が最大である点は P_{13} であり、その回数は

$f(13)=2+4=6$

である。

(問題の一般化)

$p\,,\,q$ は互いに素な異なる正の整数とする。円周上に pq 個の点 $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{pq-1}$ があって、反時計回りにこの順で並んでいる。最初は P_0 にある石を次の規則で移動させる。

（規則）さいころを投げて偶数の目が出たら反時計回りに石を p 個先の点に移動させ、
奇数の目が出たら時計回りに q 個先の点に移動させる。

この操作を繰り返すとき、石が点 P_i に移動するための最小の操作の回数を $f(i)$ として $f(i)$ $(i=0\,,\,1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,pq-1)$ の最大値と、それを与える i を求めよ。

では、一般化である。次の(♣)を示して、鳩の巣原理を使えば終わりである。

(♣)　2 つの移動 (x_1, y_1), (x_2, y_2) に対して石が円上で同一点に到達する
$\iff$ $x_2 - x_1$ は q の倍数かつ $y_2 - y_1$ は p の倍数

共通テストの本題の説明では、問題の誘導を尊重して不定方程式 $5x - 3y = 1$ の両辺を $15n$ 倍する方法を取って(◇)を示したが、この同値関係は実はもっと簡単に証明できる。

$\Longleftarrow$) は成り立つ。

$\Longrightarrow$) $px_1 - qy_1 = i + pqm$, $px_2 - qy_2 = i + pqn$ ($0 \leqq i \leqq pq - 1$ かつ i, m, n は整数) が成り立つとき 2 式の差をとって $p(x_1 - x_2) - q(y_1 - y_2) = pq(m - n)$ であり、これからさらに

$$p(x_1 - x_2) = q\{(y_1 - y_2) + p(m - n)\} \cdots ④$$

$$q(y_1 - y_2) = p\{(x_1 - x_2) - q(m - n)\} \cdots ⑤$$

が成り立つ。ここで④の右辺が q の倍数であることから左辺の $p(x_1 - x_2)$ も q の倍数であり、さらに p, q は互いに素であるので $x_1 - x_2$ が q の倍数である。また同様で⑤から $y_1 - y_2$ が p の倍数であることがわかる。

さて、一般化した問題の解答である。

異なる pq 組 $(x, y) = (i, j)$ $(0 \leqq i \leqq q - 1, 0 \leqq j \leqq p - 1)$ $\cdots$⑥ のどの 2 つについても x 座標の差が q の倍数でないか、または y 座標の差が p の倍数ではないので、(♣)から⑥のそれぞれの移動に対して石の到達点はすべて異なるものになることが導かれる。さらに円上の点は全部で pq 個なので、⑥の pq 個の移動ですべての点への移動が尽くされている。(なお $(0, 0)$ については $p > q$ ならば $(q, 0)$ を、また $p < q$ ならば $(0, p)$ を考えることになり $f(0) = \min\{p, q\}$ である。) そしてやはり(♣)から, P_i $(i = 1, 2, \cdots, pq - 1)$ の各点に石が到達する移動でさいころを投げる回数が最小となる (x, y), は⑥の中にある。それらの組の中で $x + y$ が最大であるものは $(q - 1, p - 1)$ であるので、求める最大値は $p + q - 2$ である。なお、その移動に対しての石の到達点は $p(q - 1) - q(p - 1)\big(= -p + q\big)$ を pq で割った余りを r として点 P_r であり、この r が $f(i)$ を最大にする i である。

(最後に一言)

今年から新制度に移行した一次試験は、記述式問題の取捨等で迷走したり、コロナに祟られたりと、何とも受験生にとっては対策を立てることさえも大変だったであろう。またどのような指導をすればよいのか、現場の教員においても手探りの状態であった。予想平均点を見ると思ったよりも高い感じであるが、これを受験生がきちんと準備して対応した結果と見ることは出来ないように思う。

指導する立場にある一人としては、共通テストがどんな力を測ろうとしているのかに興味がある。中央教育審議会答申（平成 28 年 12 月）で授業改善のための視点として以下の 3 つ

「主体的な学び」「対話的な学び」「深い学び」

が示された。これらは今後の高校教育の方向性を示すキーワードでもあり、共通テストの形式を見ると、やはり関連はあるようだ。一方、共通テストの問題作成方針が国際的学習到達度テスト PISA を意識したものになっているのではという見方をする人もいる。いずれにしても今年の

「数学」の問題が制度を変える目的に適っていたのかについては、大いに議論の余地はあると思っている。共通テストが今後、回を重ねる中で、ほとんどの人が見て納得出来るテスト形式・内容になってゆくことを願いたい。

2021.1.31（日）

◇ web サイト「ky の書架」には他にも例えば大学入試の整数問題過去問などを PDF ファイルで UP してあります。
　興味のある方は URL（http://kynoshoka.com/）を入力するか、”ky の書架”で google または yahoo 検索をしてサイトにアクセスして下さい。