column1

○$\tan 1^\circ$ は無理数

2006 年度京都大学後期試験で「$\tan 1^\circ$ は有理数か」という問題が出題された。この問題の解答自体は簡単で、加法定理と数学的帰納法で $\tan 1^\circ$ が有理数とすると $\tan 30^\circ$ が有理数となって不合理となる。(したがって $\tan 1^\circ$ は有理数でない。)

では $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ はどうなのだろうか。結論を先に言うとやはりどちらも無理数である。証明の本質は $\tan 1^\circ$ の場合と同じであるが、以下の関係を使うとわかりやすいだろう。

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta = \sin\theta\{2\cos^2\theta + (2\cos^2\theta - 1)\}\\ &= \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)\\ &= \sin\theta(3 - 4\sin^2\theta)\\ \cos 3\theta &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta = \cos\theta(\cos 2\theta - 2\sin^2\theta) = \cos\theta(1 - 4\sin^2\theta)\\ &= \cos\theta(4\cos^2\theta - 3)\end{aligned}$$

はお馴染み 3 倍角の公式であるが、さらにこれから

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= \sin 3\theta\cos 2\theta + \cos 3\theta\sin 2\theta\\ &= (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)(1 - 2\sin^2\theta) + \cos\theta(1 - 4\sin^2\theta)2\sin\theta\cos\theta\\ &= (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)(1 - 2\sin^2\theta) + 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta)(1 - 4\sin^2\theta)\\ \cos 5\theta &= \cos 3\theta\cos 2\theta - \sin 3\theta\sin 2\theta\\ &= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)2\sin\theta\cos\theta\\ &= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta)(4\cos^2\theta - 1)\end{aligned}$$

という 5 倍角の関係がわかる。これを用いると $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ が有理数とすると

$$\sin 1^\circ \to \sin 5^\circ \to \sin 15^\circ \to \sin 45^\circ,\ \cos 1^\circ \to \cos 5^\circ \to \cos 15^\circ \to \cos 45^\circ$$

の順に有理数となり、(どちらについても)不合理である。よって $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ はどちらも無理数である。

2009.12.14 (月)

(追記)

「n が奇数のとき $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ がそれぞれ $\sin\theta$, $\cos\theta$ だけで表される」$\cdots$(A) ことはド・モアブルの公式を用いてもわかる。

(ド・モアブルの公式)

任意の正整数 n において $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

この証明自体は加法定理と数学的帰納法を使えばよく簡単である。ここでは(A)を $n = 5$ についてみておくが、ド・モアブルの公式から $(\cos\theta + i\sin\theta)^5$ を展開してまとめて、実数部分が $\cos 5\theta$ で虚数部分が $\sin 5\theta$ であるので

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\\ \sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\end{aligned}$$

となる。そしてお馴染みの $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いることで(A)が $n = 5$ の場合に正しいこと

がわかる。

2010.1.29（金）

◇ web サイト「ky の書架」には他にも例えば大学入試の整数問題過去問などを PDF ファイルで UP してあります。
　興味のある方は URL（http://kynoshoka.com/）を入力するか、”ky の書架”で google または yahoo 検索をしてサイトにアクセスして下さい。